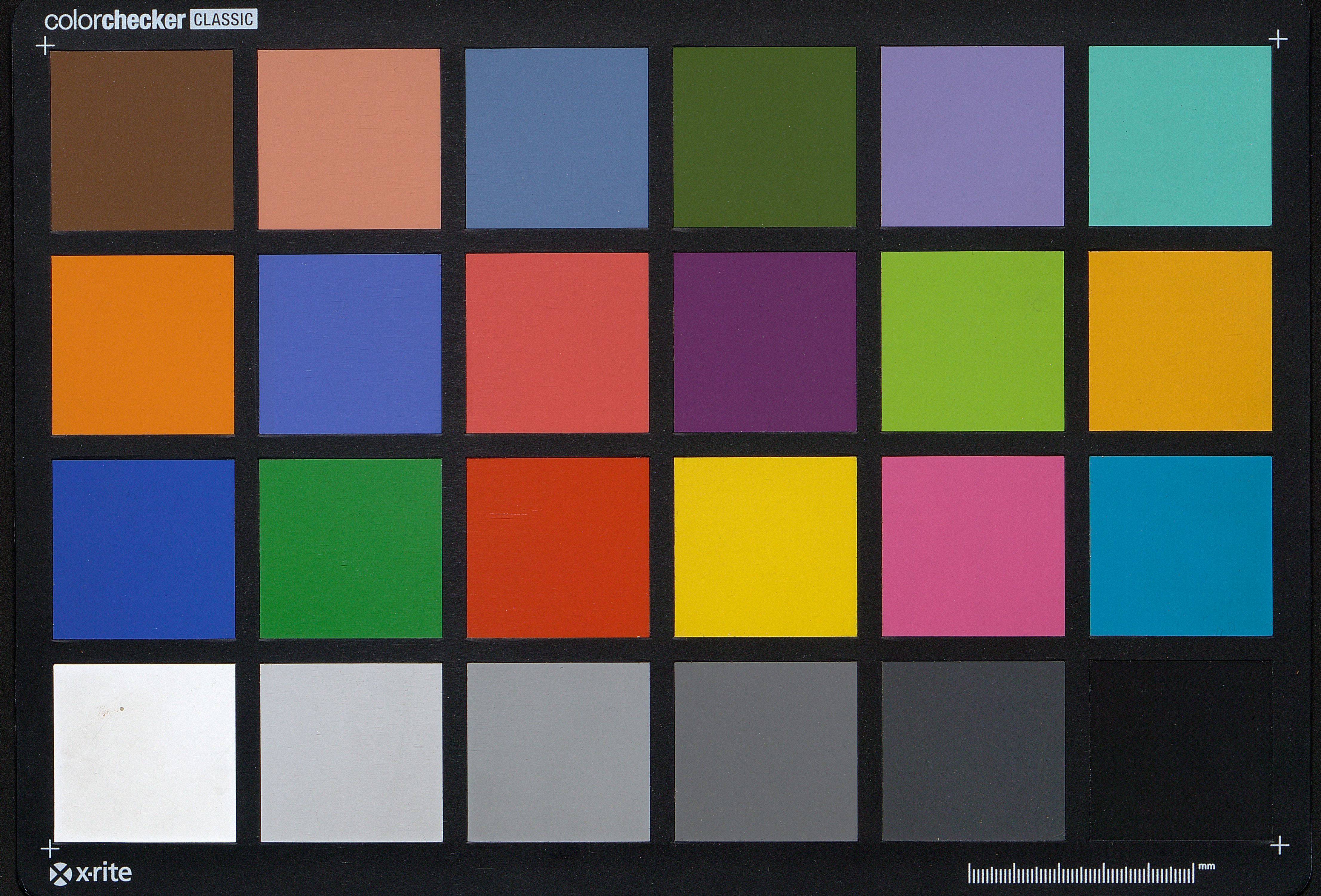

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm

ANALYSE

BERTAND

ÉCOLE

NORMALE

MS

217

E.N.S.

Ms 217

1r

ECOLE NORMALE SUP

1v

Cours d'analyse

Le problème des tgtes et celui des maxima et des minima sont les deux questions dont l'étude a conduit les géomètres à la découverte du nouveau calcul. C'est comme solution nouvelle et complète de ces deux problèmes que Leibnitz (acta eruditorum 1684) a présenté, pour la 1re fois, l'exposition de ses principes.

il est facile de comprendre a priori comment les deux questions, très distinctes en apparence n'en font qu'une en réalité, et de faire voir que la solution générale de l'une des deux entraîne nécessairement celle de l'autre.

En 1er lieu si le problème des tgtes est résolu d'une manière générale, on peut y ramener la solution de tout problème de ~~Géométrie~~ maximum ou minimum relatifs à une fonction d'une seule variable.

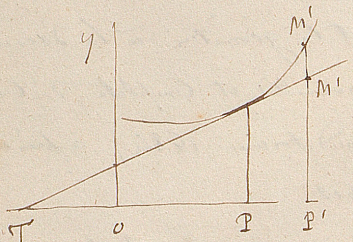
Soit en effet $\varphi(x)$ une telle fonction : si l'on considère la courbe dont l'équation en coord rectilignes est

$$y = \varphi(x)$$

l'inspection de la figure fait voir que les points pour lesquels l'ordonnée y, c. a d. la fonction φ devient maximum ou minimum, sont ceux pour lesquels la tgte est parallèle à l'axe des X ; on les trouvera donc en égalant a zero le coeff. angulaire de la tangente.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

réciproquement, si l'on connait une méthode générale pour exprimer qu'une fonction est maxima ou minima on peut en déduire la tg^te à une courbe en un point q.c.q.



Soit en effet MT la tg^te menée en un point M d'une courbe concave vers le haut et rapportée aux axes rectang. OX OY.
Soient x, y les coord. du point M, si a désigne l'abscisse du point T où la tg^te perce l'axe des x

le rapport $\frac{y}{x-a} = \frac{MP}{PT}$

conservera la même valeur si l'on substitue au point M tout autre point de la tangente MT; et il augm. p.e.s. si a restant fixe, on fait varier la position du point M sur la courbe donnée. On a en effet en désignant par M' un point voisin de M et par M'' le point où M'P' coupe la tangente

$$\frac{M''P'}{P'T} = \frac{MP}{PT} < \frac{M'P'}{P'T}.$$

et cette inégalité a lieu évid. de quelque côté que ~~sont~~ le point M' soit situé sur la courbe par rapport au point M. On peut donc dire que le point M est parmi les points voisins celui pour lequel le rapport

$$\frac{y}{x-a}$$

est un minimum. De sorte qu'en appliquant à ce rapport la théorie des maxima et des minima et exprimant que l'abscisse du point M remplit la condition du minimum quelle qu'elle soit, on obtiendra une

équation de condition qui déterminera a et fera connaître la tg^te MT. —

Il est clair que si la courbe tournait sa concavité dans un sens opposé, le rapport $\frac{y}{x-a}$ serait pour le point M un maximum. Il n'y aurait exception à cette méthode que si la courbe présentait en M une inflexion —

C'est pour résoudre les deux problèmes que le nouveau calcul a été créé d'abord; mais les principes employés dans ce but, n'ont pas tardé à trouver de nombreuses applications et ce n'est plus aujourd'hui la nature de la question résolue mais seulement le choix de la méthode employée qui doit faire regarder une question comme appartenant ou non au Calcul ~~différentiel~~ infinitésimal.

Le caractère distinctif de cette branche de science mathématique est l'emploi des <u>inf^t petits</u>

On nomme inf^t petits une variable dont la limite est zéro. —

Lorsque dans une question on doit considérer à la fois plusieurs inf^t petits, on considère ordinairement l'un d'eux comme <u>inf^t petit principal</u>, le choix de cet inf^t petit étant d'ailleurs complètement arbitraire

Cela fait on adopte les définitions suivantes:

Tout infᵗ petit dont le rapport à l'infᵗ petit principal a une limite finie est dit infᵗ petit du 1ᵉʳ ordre.

tout infᵗ petit dont le rapport au carré de l'infᵗ petit principal a une limite finie est dit infᵗ petit du 2ᵉ ordre.

En général un infᵗ petit est dit de l'ordre n lorsque son rapport à la nᵉ puissance de l'infᵗ petit principal a une limite finie

il est facile de donner des exemples de grandeurs infᵗ petites de divers ordres.

(3). Soit $\varphi(x)$ une fonction qcq d'une variable si l'on donne à x un accroissement infᵗ petit h l'accroissement correspondant de la fonction est

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)$$

c'est un infiniment petit du même ordre que l'accroissement donné à la variable, car on sait qu'en général le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

a une limite finie

On démontre en effet (math. spéciales) que ce rapport ne peut pas être constamment nulle.

On peut en conclure immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

ne peut non plus croître indéfiniment, en d'autres termes que l'accroissement de la variable ne peut pas être un infᵗ petit d'ordre supérieur à l'accroissement correspondant de la fonction.

Un peu de réflexion fait apercevoir l'identité de cet énoncé avec le précédent. Quand on considère en effet une fonction $\varphi(x)$ et la variable x dont elle dépend, rien n'empêcherait de désigner cette fonction par une lettre y, et de regarder y comme une variable dont x serait une fonction $\psi(y)$. Cette vérité acquiert une complète évidence en regardant $\varphi(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe ayant pour éq.

$$y = \varphi(x).$$

Cette courb. étant continue et les ax. de coord. choisis à volonté, on peut regarder l'abscisse comme fonction de l'ordonnée tout aussi bien que l'ordonnée comme fonction de l'abscisse ; et du moment qu'il est prouvé d'une manière générale que l'accroissement inft petit de l'une des quantités ne peut être d'un ordre supérieur à celui de l'autre, la proposition s'applique également à l'une et à l'autre et prouve f. e. s. que les deux accroissements sont nécessairement de même ordre.

(4) Le rapport $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ a donc une limite finie, quand h tend vers zéro ; cette limite est une nouvelle fonction de x qu'on nomme la dérivée de la fonction φ

La recherche et l'étude des dérivées a une grande importance dans le calcul infinitésimal. —

(5) La proposition relative à l'ordre de grandeur de l'accroissement inft petit d'une fonction a une grande importance dans les diverses parties des mathques. Voici quelques conséquences relatives à la Géométrie.

Si les points d'une courbe sont définis de telle manière que chacun d'eux soit déterminé par la valeur attribuée à une certaine variable α, la distance de deux points infᵗ voisins de la courbe est un infᵗ petit de même ordre que la différence des valeurs de α auxquelles correspondent ces points.

Si l'on nomme en effet x, y les coord. de l'un de ces points, $x+h$, $y+k$ les coord. de l'autre, δ étant l'accroissement correspondant de α, il résulte de la proposition générale que h et k sont l'un et l'autre de même ordre que δ ; or on a

$$\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2+\left(\frac{k}{\delta}\right)^2}$$

et par ce rapport a une limite finie ; ce qui prouve la proposition énoncée ; car $\sqrt{h^2+k^2}$ est la distance des deux points considérés.

Si les points d'une courbe correspondent un à un à ceux d'une autre courbe, de telle sorte que un point de l'une des courbes étant choisi, son correspondant se trouve déterminé la distance de deux points voisins de l'une des courbes est de même ordre que celle de leurs correspondants.

Si l'on suppose en effet que les coord. x et y des points de la 1ʳᵉ courbe soient exprimées en fonction d'une variable α, les coord x_1 y_1 de ceux de la 2ᵉ courbe dépendant également de α ; si donc on veut considérer deux points infᵗ voisins sur l'une des courbes, et leurs correspondants sur l'autre, il suffit d'attribuer à α deux valeurs infᵗ voisines α et $\alpha+\delta$, et d'après ce qui précède, les distances

des points ainsi obtenus, l'un et l'autre, sont du même ordre que δ, et par suite elles sont des inft petits du même ordre.

Si une ligne droite se déplace dans l'espace suivant une loi quelconque de telle sorte que chacune de ses positions corresponde à une valeur déterminée attribuée à une variable α, l'angle de deux positions inft voisines de cette droite est du même ordre que la différence des valeurs correspond. de α.

Pour le démontrer supposons que par l'origine O on mène des parallèles aux diverses droites considérées qui, évid. formeront entre elles les mêmes angles que celles-ci. Nous obtiendrons ainsi un cône dont les génératrices répondront aux différentes valeurs de α. Si l'on coupe ce cône par une sphère concentrique de rayon $= 1$, la courbe d'intersection aura un point correspondant à chaque valeur de α. Si donc on considère deux valeurs inft rapprochées de cette variable α et $\alpha+\delta$, les points correspondants M, M' de cette courbe auront une distance MM' du même ordre que δ, et par suite dans le triangle OMM', l'angle O est évid. du même ordre que δ, car on a $2 \sin \frac{1}{2} O = MM'$.

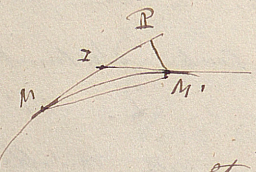
Si les points d'une surface correspondent un à un à ceux d'une autre surface, de telle sorte que les points de l'une des surfaces étant déterminés, leurs correspondants se trouvent ainsi déterminés, la distance de deux points inft voisins de l'une des surfaces est du même ordre que celle de leurs correspondants.

Considérons en effet deux points A et B de la première surface, et les points P et Q qui leur

leur correspondant dans la seconde, supposons que B se rapproche de A en suivant une certaine courbe sur la surface; Q se rapprochera en même temps de P en suivant une courbe correspondante sur la seconde surface. Si nous portons notre attention sur les deux courbes sans nous occuper des autres points de l'une et l'autre surface, nous rentrons dans le cas examiné plus haut, et nous concluons que les distances AB, PQ sont des infiniment petits de même ordre.

(6). Donnons maintenant un exemple d'infiniment petit du second ordre.

Considérons une courbe plane qcq et sa tangente en un point M. Si d'un point voisin M' situé à une distance infiniment petite du 1er on abaisse sur cette tangente une perpendiculaire M'P, M'P sera un infiniment petit du second ordre.



Et d'abord il est facile de voir par la construction du triangle MM'P que M'P est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. On a en effet dans ce triangle

$$\frac{M'P}{MM'} = \sin PMM'$$

et comme l'angle PMM' tend évid. vers zéro, MM' étant du 1er ordre, M'P est d'un ordre supérieur au premier.

Il nous reste à prouver que sin PMM' ou ce qui est la même chose que l'angle PMM' est un infiniment petit du 1er ordre; car si cela est, M'P étant le produit de deux infiniment petits du 1er ordre est un infiniment petit du second. —

Pour faire cette démonstration considérons la tgte en M' à la courbe donnée; soit I son intersection avec la tgte en M.

Cette démonstration n'est pas rigoureuse.

On a évidemment :

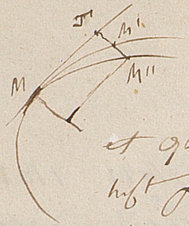
angle $I = IM'M + IMM'$.

en sorte que I est du même ordre que les angles IMM' $IM'M$ car ces deux angles sont du même ordre. il suffit donc d'établir que cet angle I est du 1r ordre. Or cela résulte de ce qui a été démontré (5) ; en effet l'angle formé par la tgte en M avec l'axe des x est une fonction de l'abscisse du point M. Si donc cette abscisse augm. ~~infint petit~~ d'une quantité infint petite du 1r ordre, l'angle variera lui même d'une quantité infint petite du 1r ordre ; or la variation de cet angle est précisément ~~la~~ l'inclinaison i des deux tangentes voisines et le théorème est p.c.q. démontré. —

(7) La même proposition s'étend aux courbes à double courbure — Si en un point M d'une courbe à double courbure, on mène une tangente à cette courbe, la distance de cette tangente à un point infint voisin M' situé sur la même courbe à une distance infint petite de M est un infint petit du second ordre. Il est clair en effet que la distance d'un point à une droite est du même ordre que celle de leur projection sur un plan choisi arbitrairement. On peut donc substituer à la courbe donnée sa projection sur un plan sans altérer l'ordre de la distance dont nous parlons, et par suite en vertu du théorème relatif aux courbes planes, cette distance est du 2e ordre —

On peut trouver également des exemples d'infint petits d'ordre supérieur au second. —

Considérons une courbe plane qcq et sa tgte en M.



Si sur cette tangente on prend une longueur infiniment petite MI et qu'on élève au point I une perpend. IM' sur MI, IM' sera infiniment petit du 2e ordre, si MI est du premier. Si donc $MI = h$ on a $M'I = Kh^2$.

K ayant une limite finie.

Considérons actuellement un cercle de rayon R tgt encore à la courbe donnée et situé du même côté qu'elle par rapport à la tangente. Prolongeons IM' jusqu'en M''. On aura par la propriété connue du cercle

$$IM'' = \frac{MI^2}{2R - IM''} = \frac{h^2}{2R - IM''}$$

et par suite

$$M'M'' = IM'' - IM' = h^2\left(\frac{1}{2R - IM''} - K\right).$$

Si donc on détermine R de telle sorte que

$$\frac{1}{2R - IM''} - K$$

ait pour limite zero c. a d. en nommant K_1 la limite de K si l'on prend $R = \frac{1}{2K_1}$

la distance $M'M''$ sera infiniment petite d'un ordre supérieur au second. Il existe donc en chaque point d'une courbe plane un cercle tangent qui, dans le voisinage du point de contact, est infiniment plus voisin de la courbe que celle-ci ne l'est de sa tangente. Ce cercle est dit cercle osculateur.

6613 2

Substitution des inf^t petits

(9) Lorsqu'on emploie les inf^t petits, c'est presque toujours comme intermédiaires, et ils figurent dans le raisonnement soit par leurs rapports qui ont des limites finies, soit par la somme d'un nombre indéfiniment croissant d'entre eux. Lorsque l'on a ainsi en vue la recherche de la limite d'un rapport, ou de la limite d'une somme, on peut très souvent simplifier la question à l'aide du principe suivant:

Dans la recherche de la limite d'un rapport ou de la limite d'une somme on peut remplacer un inf^t petit par un autre dont le rapport au premier ait pour limite l'unité.

Soient en effet α β deux inf^t petits; α' β' deux autres inf^t petits. tels

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1 \qquad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1$$

On a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta}.$$

et en passant à la limite

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Soit maintenant

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \text{—} + \alpha_n$$

une somme d'inf^t petits, dont le nombre n augm. indéfiniment à mesure qu'ils tendent vers zéro, et

$$\beta_1 \ \beta_2 \ \text{—} \ \beta_n$$

d'autres infiniment petits en nombre égal, tels que

6bis v

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1 \qquad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1 \quad \text{—} \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$$

Je dis que la limite de la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \text{—} + \alpha_n$$

ne sera pas changée si l'on remplace α_1 par β_1, α_2 par β_2 — α_n par β_n.

Soit en effet

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1+\varepsilon_1 \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1+\varepsilon_2 \quad \text{—} \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1+\varepsilon_n$$

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ — ε_n étant par hypothèse des inf^t petits

on en déduit

$$\beta_1+\beta_2+\text{—}+\beta_n = (\alpha_1+\alpha_2 \text{—}+ \alpha_n) + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \text{—} + \alpha_n\varepsilon_n$$

Soit η la plus grande en valeur absolue des quantités $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ — ε_n, les deux sommes

$$(\alpha_1+\alpha_2+\text{—}+\alpha_n) \text{ et } (\beta_1+\beta_2 \text{—} +\beta_n)$$

ont évid. une différence moindre que

$$\eta(\alpha_1+\alpha_2+ \quad +\alpha_n).$$

Or η tend vers zéro et le produit est p.c.s. un inf^t petit, de sorte que les deux sommes ont la même limite.

(10) La condition suffisante pour que deux inf^t petits α et β puissent être substitués l'un à l'autre est d'après ce qui précède que la limite du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ soit l'unité.

ou d'autre termes il faut qu'on ait

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon$$

ε étant inf^t petit —
ou ce qui revient au même

$$\alpha - \beta = \beta\varepsilon$$

c. à d. que la différence $\alpha - \beta$ est inf^t petite par rapport à β et le théorème peut alors s'énoncer comme il suit :

Deux inf^t petits α et β peuvent être substitués l'un à l'autre, et l'on peut négliger leur différence, soit dans la recherche d'une limite de rapports, soit dans la recherche d'une limite de sommes, toutes les fois que leur différence est inf^t petite par rapport à chacun d'eux. —

Nous allons montrer par quelques exemples l'utilité des inf^t petits dans la solution de qq. problèmes empruntés à la Géométrie.

Pour déterminer en un point la tg^te à une courbe il faut comme on sait joindre le point donné à un point voisin et chercher la limite de la direction ainsi définie, en d'autres termes et plus brièvement, il faut joindre le point de contact donné au point inf^t voisin de la courbe, l'expression inf^t voisin exprimant suffisamment le rapprochement indéfini des deux points considérés.

Le théorème suivant peut être fort utile pour la détermination des tangentes.

7r

Si l'on considère un point M d'une courbe et un point M' situé sur la courbe à une distance infiniment petite de M, la direction qui a la limite est celle de la tangente ne diffère pas de la direction limite qu'on obtiendrait en substituant au point M' un autre point M'' non situé sur la courbe, mais dont la distance à M' soit infiniment petite par rapport à MM'.

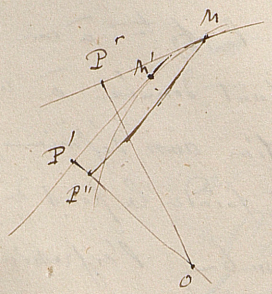
Considérons en effet le triangle MM'M''. Nous aurons

$$M'M'' = MM' \cdot \frac{\sin M}{\sin M'M''M}$$

Si donc M'M'' est comme on l'a supposé un infiniment petit d'ordre supérieur à MM', il faut que sin M soit lui-même infiniment petit et que par suite les deux directions MM' MM'' se confondent à la limite ; c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Nous appliquerons ce principe à la solution de quelques problèmes.

12. Premier Problème. On abaisse d'un point fixe des perpend. sur ~~une courbe plane~~ les tangentes à une courbe plane ; trouver la tangente à la courbe formée par les pieds des perpend.



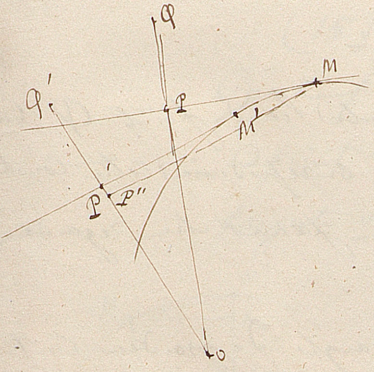
Soient OP, OP' les perpendiculaires du point O sur les tangentes aux points voisins M et M'. La ligne PP' sera un infiniment petit du même ordre que MM' que nous regarderons comme l'infiniment petit principal. D'après cela on peut substituer au point P' un autre point qui en soit à une distance infiniment petite du second ordre ; menons par le point M une parallèle à la tangente M'P' ; cette parallèle coupe OP' en un point P'' qui peut être substitué à P'. En effet P'P'' égale la distance du

soit M'' à la tangente en M' et est par conséq. un infᵗ petit du second ordre. Mais les points P et P'' sont situés sur une circonférence décrite sur OM comme diamètre, la direction PP'' a donc pour limite la tangente à cette circonférence, et la normale s'obtiendra par conséq. en joignant le point P au milieu de OM.

(13.) 2ᵉ problème — On abaisse d'un point O des perpend. sur les tangentes d'une courbe plane et l'on prolonge chaque perpendiculaire jusqu'en un point Q tel que

$$OP \times OQ = a^2$$

trouver la tangente à la courbe lieu des points Q.



Soient Q, Q' deux points infᵗ voisins de la ligne considérée et correspondant aux tangentes dont les points de contact sont M et M'. Il est clair que la distance de ces points est infᵗ petite de même ordre que MM' que nous prendrons pour infᵗ petit principal. Menons comme précédemment par le point M une parallèle MP'' à la tangente M'P' et soit P'' le point où cette parallèle coupe OP'. P'P'' sera comme on l'a vu un infᵗ petit du 2ᵉ ordre.

Déterminons ensuite un point Q'' tel que $OP'' \times OQ'' = a^2$. Q'Q'' sera un infᵗ petit du 2ᵉ ordre; car la distance OQ' est une fonction de OP' et OQ'' est la même fonction de OP''. On passe donc de l'une de ces lignes à l'autre en attribuant à la variable, dans cette fonction, l'accroissement infᵗ petit du 2ᵉ ordre P'P'' et la fonction s'accroît alors d'une quantité infᵗ petite de même ordre, c.à.d. du second.

D'après cela on peut substituer au point Q' le point Q'' et la tangente cherchée est la direction limite de QQ''. Or les points P, P'' sont situés sur la circonférence d'un cercle décrit sur OM comme diamètre, et l'on sait qu'en portant sur les cordes d'un cercle issues de l'extrémité d'un diamètre des longueurs réciproquement proportionnelles à elles mêmes, le lieu des points obtenus est une ligne droite perpendiculaire à OM. Les points Q et Q'' sont donc sur une telle droite et la tg.te cherchée est par suite la perpend.re QR abaissée du point Q sur OM.

La géométrie élémentaire montre facilement la similitude des triangles OQR et OMP. On en conclut

$$OM \times OR = OP \times OQ = a^2$$

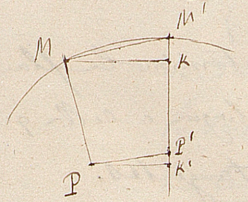
Il en résulte qu'en opérant sur la courbe lieu des points Q comme on l'a fait sur la courbe proposée, on reproduirait cette courbe même; de sorte que les deux lignes peuvent être regardées comme conjuguées. —

(14) Troisième Problème. Un angle de grandeur constante est circonscrit à une courbe donnée. Trouver la tangente à la courbe lieu des positions de son sommet.

Soit P une position du sommet de l'angle considéré; M et N les points de contact correspondants. P' une 2e position du sommet infiniment voisine de P; M' et N' les points de contact correspondants. Les coordonnées du point P étant consid. des fonctions déterminées de l'abscisse du point M, la distance PP' est un infiniment petit du même ordre que MM'; nous la regarderons comme du 1er ordre.

Cela posé menons par les ~~parallel~~ points M et N des parallèles aux tangentes en M' et N', nous obtiendrons un parallélogramme P''KP'L, dont les côtés sont inf^t petits du second ordre, et l'on pourra substituer à P' le sommet opposé P'' de ce parallélogramme; mais P et P'' sont situés sur un segment de cercle de l'angle P décrit sur MN comme corde, et PP'' est à la limite tg^te à ce segment; d'où l'on conclut que la ~~tang~~ courbe cherchée a elle même même tangente en P que le segment, lequel est évid. circonscrit au triangle MPN. —

(15). Le problème — Sur les normales à une courbe plane, on porte une longueur constante l à partir des points où chaque normale perce la courbe; trouver la tangente au lieu des points ainsi obtenus.



Soient M et M' deux points inf^t voisins de la courbe donnée, et P, P' les points correspondants qu'on en déduit de telle sorte qu'on a $MP = M'P' = l$.

Joignons MM', et PP', et abaissons des points M et P des perpend. MK et PK' sur M'P'. On aura

$$KK' = MP \cos\varphi = l\cos\varphi$$

φ étant l'angle des deux normales considérées. On en déduit

$$M'P' - KK' = M'K - P'K' = l(1-\cos\varphi) = 2l\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

L'angle φ étant inf^t petit du 1er ordre, $M'K - P'K'$ est inf^t petit du second ordre. Or on a.

$$M'K = MM' \cos MM'K$$

MM' est infᵗ petit du 1er ordre. l'angle $MM'K$ est infᵗ peu différent d'un droit; donc $M'K$ est un infᵗ petit d'un ordre supérieur au 1er; il en est donc de même de $P'K'$ dont la différence avec $M'K$ est du second ordre; mais on a

$$P'K' = PP' \cos PP'K'.$$

et il faut p. c. s. de deux choses l'une; ou que PP' soit infᵗ petit d'un ordre supérieur au premier, ou que $PP'K$ diffère infᵗ peu d'un droit. Dans la 1re hypothèse la courbe se réduit à un point, et par suite la courbe cherchée est un cercle de rayon l. dans la seconde hypothèse qui forme le cas général, l'angle $PP'K'$ étant droit à la limite, PP' est perpend. à $K'P'$, c.à.d. à $M'I$ qui à la limite ne diffère pas de MP. et la tangente cherchée est perpendiculaire à MP, c.à.d. parallèle à la tangente en M à la courbe proposée.

(16). On peut souvent déterminer le plan tgt d'une surface par des considérations analogues à celles que nous venons d'employer pour la recherche des tangentes.

On entend par plan tangent d'une surface en un point donné un plan qui contient les tgtes à toutes les courbes situées sur la surface et menées par ce point.

Il convient de montrer d'abord qu'en chaque point d'une surface il existe un pareil plan.

Soient AB et AC deux courbes qui se coupent en A sur une surface donnée, et AD une 3e courbe menée par le

même point A. Il faut prouver que la tgte en A à la courbe AD est dans le même plan que les tgtes aux courbes AB et AC.

Considérons en effet la courbe AD comme la limite d'une courbe MN qui restant toujours sur la surface s'approche de AD et coupe AC et AB respectivement en des points P et Q de plus en plus voisins de A. Les trois lignes AP, AQ, PQ sont évidemment dans un même plan qui est celui des points A, P, Q. Les positions limites de ces lignes sont donc aussi dans un même plan; or AP a pour limite la tangente en A à la courbe AB; AQ a pour limite la tangente en A à la courbe AC, et PQ qui réunit deux points infᵗ voisins de la courbe MN est, en général, tangent à la limite à la courbe AD limite de la courbe MN. Les trois lignes limites sont donc les tangentes aux trois courbes proposées et le théorème se trouve démontré.

(17). Le plan tgt en un point A d'une surface est à une distance infᵗ petite du 2ᵉ ordre de tout point situé sur la surface à une distance infᵗ petite du 1ᵉʳ ordre du point de contact A.

Soit en effet un point B de la surface situé à une distance infᵗ petite du ~~point B~~ premier ordre du point A. Coupons la surface par un plan conduit suivant AB, perpendiculairement au plan tangent en A, et soit ABC la courbe d'intersection de ce plan avec la surface, et AT la tangente à cette courbe qui, évidemment est l'intersection de ce plan avec le plan tangent MN; la distance du point B à AT est

inf^t petite du 2e ordre, et comme cette distance se confond évidemment avec celle du point B au plan MN, la proposition est démontrée. On en conclut que si A et B sont deux points inf^t voisins d'une surface, le plan tg^t en B et le plan parallèle mené par le point A sont à une distance inf^t petite du second ordre.

(18) Pour déterminer le plan tg^t à une surface en un point M, il faut considérer avec le point M deux autres points inf^t voisins N et P situés sur la surface et chercher la limite du plan MNP ; MN et MP sont en effet, à la limite les tangentes à deux courbes tracées sur la surface, et par suite, leur plan n'est autre que le plan tg^t en M.

On verra absolument comme pour les courbes que les points N, P étant supposés situés à des distances inf^t petites du premier ordre du point M, on peut leur substituer à d'autres points N' et P', tels que N'N et P'P soient du 2e ordre une pareille substitution n'altérant pas la direction limite des droites MN, MP ne changera pas non plus la direction limite du plan MNP

(19). Problème. On abaisse d'un point O des perpendiculaires sur les plans tg^ts d'une surface donnée trouver le plan tangent à la surface lieu des pieds de ces perpendiculaires.

Soit OP la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan tgt en A ; OQ et OR les perpend. respectivement abaissées du même point O sur deux tangent aux points B et C infᵗ voisins du point A. Les trois points P, Q, R sont les trois points infiniment voisins de la surface cherchée, et le plan PQR est à la limite, le plan tgᵗ demandé.

Si les distances AB et AC sont infᵗ petites du 1ᵉʳ ordre, on a vu qu'il en est de même des distances PQ, PR et p.c.s. on peut substituer aux deux points Q et R deux autres points Q_1 et R_1 pourvu que QQ_1 et RR_1 soient des infᵗ petits du second ordre.

Nous obtiendrons les points Q_1 et R_1 en menant par le pᵗ A des plans parallèles aux plans tgts en B et en C, et abaissant sur ces plans des perpendiculaires OQ_1 OR_1, en sorte que le ~~limite~~ plan tgᵗ cherché est la limite du plan PQ_1R_1, lorsque les points Q_1, R_1 se rapprochent indéfiniment du point P. Mais le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur tous les plans possibles passant par le point A est une sphère décrite sur OA comme diamètre et le plan PQ_1R_1 qui passe par trois points infᵗ voisins de cette sphère, lui est tangent à la limite ; en sorte que le plan tangent cherché est tangent en P à la sphère décrite sur OA comme diamètre.

11r

9° Problème — On abaisse d'un point O des perpend. sur les plans tangents à une surface donnée et l'on prolonge chaque perpendiculaire OP jusqu'en un point Q tel que $OP \times OQ = a^2$ — trouver le plan tangent à la surface lieu des points P —

Par des raisonnements semblables à ceux qui ont servi dans la solution du problème précédent, on trouvera que le plan demandé au point Q est perpendiculaire sur OA qui joint le point O au point de contact du plan tangent sur lequel OP est perpendiculaire et qu'il coupe le rayon OA en un point B tel que

$$OA \times OB = a^2$$

Ensuite que la surface proposée et la surface lieu des points P peuvent être considérées comme conjuguées, c.à.d. que en opérant sur la seconde comme on l'a fait sur la 1ère, on reproduirait précisément celle-ci.

10° Problème — Une surface S étant donnée, on détermine une seconde surface S' dont chaque point se déduit de l'un des plans tgts à la surface S à l'aide d'une certaine construction bien déterminée. On demande de déterminer le plan tgt en un point à la surface S'.

Soit A un point de la surface S, MN le plan tgt en ce point, et P le point de la surface S' déduit du plan tangent MN par la construction convenue.

Pour obtenir le plan tgt cherché il faut déterminer deux points Q et R infst voisins de P, ~~et~~ à l'aide des

la même construction ~~aux plan tangent~~ appliquée aux plans tangents menés à la surface S les deux points B et C infst voisins de A. Or on peut à ces plans tangents aux points B et C substituer les plans parallèles menés par le point A, qui en sont distants de quantités infst petites du second ordre et remplacer les points Q et R par les points Q_1 et R_1 déduits de ces nouveaux plans. Mais les trois points P Q_1 R_1 appartiennent à la surface lieu des points qu'on déduirait à l'aide de la construction convenue de tous les plans menés par le point A. Le plan tgt cherché n'est donc autre chose que le plan tangent à cette dernière surface.

On voit d'après cela que le plan tangent à la surface S' pourra se déterminer en substituant ~~à la~~ aux plans tangents de la surface S des plans quelconques passant par le point ~~P. A~~ de cette surface qui correspond ~~au~~ point de contact qu'on s'est donné sur la surface S'.

Il est clair que par cette substitution on fera disparaître toute la difficulté provenant de la nature plus ou moins compliquée de la surface donnée.

Cet énoncé comprend la solution d'une infinité de problèmes du même genre.

Différentielle des fonctions d'une ou plusieurs variables. —

Définition de la différentielle.

Si $\varphi(x)$ désigne une fonction de la variable x, on a en représentant par $\varphi'(x)$ la dérivée

$$\varphi'(x) = \lim. \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

et par suite en désignant par ε une quantité inf[inimen]t petite

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = h.(\varphi'(x)+\varepsilon) = h\varphi'(x)+h\varepsilon.$$

$\varphi'(x)$ étant une quantité finie, $h\varepsilon$ est inf[inimen]t petit par rapport à $h\varepsilon$ et la différence

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)$$

est égale en négligeant une quantité inf[inimen]t petite à

$$h\varphi'(x).$$

Ce produit peut p.[ar] c.[onséquent] remplacer l'accroissement de la fonction dans toute question où il s'agit de calculer une limite de rapports ou de sommes ; on le nomme différentielle de $\varphi(x)$ et on le représente au moyen de la lettre d placé devant la fonction.

Conformément à cette notation, la différentielle de x se confond avec l'accroissement même de cette variable, puisque la dérivée est dans ce cas égale à l'unité. En substituant donc à la lettre h l'expression dx, la différentielle d'une fonction q[uel]c[on]q[ue] prend la forme

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Cette différentielle n'est pas, comme on l'a expliqué, rigoureusement égale à l'accroissement de la fonction $\varphi(x)$

Mais elle peut le remplacer sans que cela entraîne à aucune erreur dans les limites de sommes ou de rapports où cette quantité peut avoir à figurer.

(22). La différentielle d'une fonction est d'après ce qui précède le produit de la dérivée par la différentielle de la variable. Il semble d'après cela que l'emploi de la différentielle identique à celui de la dérivée ne puisse présenter aucun avantage spécial, si petit qu'il soit. — Nous ferons cependant qq remarques qui donnent souvent un avantage assez sérieux à la considération des différentielles.

Si y est une fonction de x, x est par la même raison une fonction de y, et rien n'oblige à prendre l'une des deux variables plutôt que l'autre ou quantité fonction de l'autre et de l'autre pour fonction principale. Or l'emploi des dérivées exige absolument que l'on fasse un pareil choix, la dérivée n'ayant de sens déterminé que lorsqu'on indique la variable dont on prend la dérivée et la variable par rapport à laquelle on la prend. — Si l'on considère au contraire la différentielle y, la relation

$$dy = \varphi'(x)\,dx$$

fait connaître deux quantités proportionnelles aux accroissements inft petits que l'on peut attribuer simultanément à x et y. L'une de ces quantités est nécessairement arbitraire ; mais rien n'indique que ce soit dx plutôt que dy, la relation pouvant aussi bien s'écrire

$$dx = \frac{1}{\varphi'(x)}\,dy.$$

et donnant sous cette forme la différentielle de x considérée comme fonction de y et correspondant à une valeur arbitraire de dy.

(23) Il y a plus; la différentielle d'une fonction reste la même quelle que soit la variable par rapport à laquelle cette fonction soit exprimée; soit en effet

$$y = \psi(u)$$

une fonction de u dans laquelle la lettre u désigne elle même une fonction de x.

$$u = \varphi(x).$$

La différentielle de y, en considérant y comme fonction de x est le produit de dx par la dérivée de y $\psi'(u)\varphi'(x)$

on a donc
$$dy = \psi'(u)\varphi'(x)dx.$$

Or en prenant la différentielle de y par rapport à u, on trouve
$$dy = \psi'(u)du$$

ce qui est précisément la même chose, pourvu qu'on attribue dans ce cas à la différentielle arbitraire du, la valeur qui résulte de la définition même quand u est regardé comme fonction de x.
$$du = \varphi'(x)dx.$$

On voit donc ce cas, comme dans le précédent, que $x\,y\,u$ désignant trois variables susceptibles de s'exprimer par l'une d'entre elles la relation

$$du = \varphi'(x)dx \qquad dy = \psi'(u)du$$

font connaître trois quantités $dx\ dy\ du$, dont l'une au choix est arbitraire et qui sont proportionnelles aux accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément les trois variables x, y, u. Rien d'ailleurs n'impliquant l'obligation de choisir une variable principale de préférence à une autre.—

14 r

(24) La remarque précédente peut encore être généralisée. Considérons à la fois un nombre qcq de variables x y z u v tellement liées les unes aux autres, qu'on puisse les considérer comme fonctions de l'une quelconque d'entre elles, de x par ex. Si pour calculer les différentielles dy dz du dv qui seront proportion. à la différentielle arbitraire dx; mais le calcul une fois terminé si l'on veut adopter une nouvelle variable principale, et considérer par ex. x y z v comme fonctions de u, il n'y aura aucun changement à faire; les rapports de dx dy dz du dv resteront les mêmes, et l'on devra seulement regarder du et non plus dx comme ayant à recevoir une ~~accroissement~~ valeur arbitraire. Il est clair en effet que les différentielles étant des quantités proportionnelles aux accroissements infit petits et simultanés des variables, et toutes les variables étant déterminées par l'une d'entre elles, le problème reste le même quel que soit celui de ces accroissements que l'on se donne arbitrairement pour le faire tendre vers zéro. Supposons par exemple que l'on ait trouvé

$$dy = y'dx \quad dz = z'dx \quad du = u'dx \quad dv = v'dx$$

Si l'on prend u pour variable principale, on aura nécessairement

$$dv = \frac{v'}{u'}du.$$

La dérivée de v par rapport à u est en effet égale au produit de la dérivée de v par rapport à x, c.à.d. v' par la dérivée de x par rapport à u, c.à.d. $\frac{1}{u'}$, et l'on a p.c. comme on l'a annoncé

$$dv = \frac{v'}{u'}du.$$

C'est cette liberté que laissent les différentielles dans le choix

des variables qui constitue l'avantage de leur emploi sur celui des dérivées. Nous ferons rarement usage dorénavant des fonctions dérivées, ou du moins nous les considérerons toujours comme le rapport de deux différentielles, et pour indiquer par ex. la dérivée de y par rapport à x nous écrirons $\frac{dy}{dx}$.

Dérivées partielles.

(25). Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs variables indépend. les unes des autres, on peut en prendre la dérivée par rapport à l'une qcq de ces variables, en considérant dans cette opération toutes les autres comme des constantes. La recherche des dérivées partielles se fera absolument comme celle de la dérivée et n'exige aucune explication nouvelle.

Si $\varphi(x,y,z)$ est une fonction de x,y,z, les dérivées partielles par rapport à chacune de ces variables s'écrivent de la manière suivante

$$\frac{d\varphi}{dx} \quad \frac{d\varphi}{dy} \quad \frac{d\varphi}{dz}.$$

Le sens qu'il faut attacher à ces expressions résulte des explications précédentes ; $\frac{d\varphi}{dx}$ est le rapport de l'accroissement infᵗ petit de φ à l'accroissement correspondant de x, quand y et z restent constants. De même dans le calcul de $\frac{d\varphi}{dy}$, x et z sont deux constantes ; x et y le sont dans le calcul de $\frac{d\varphi}{dz}$.

(26) Il est bon de faire dès à présent une remarque qui recevra plus tard de grands développements. La fonction φ restant la même peut être exprimée d'une infinité de manières différentes si l'on substitue aux variables x,y,z

15 v

nos variables nouvelles qui en soient des fonctions déterminées, si l'on pose par exemple:

$$u = \psi_1 (x, y, z)$$
$$v = \psi_2 (x, y, z)$$
$$w = \psi_3 (x, y, z)$$

la fonction φ pourra être exprimée au moyen de u, v, w et il y aura lieu de considérer sous cette forme les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{du}$ $\frac{d\varphi}{dv}$ $\frac{d\varphi}{dw}$.

Nous verrons plus loin le moyen de les calculer; mais il est bon de remarquer dès à présent que la valeur $\frac{d\varphi}{du}$ ne serait pas suffisamment déterminée, si l'on connaissait la fonction φ et la variable u; cette valeur dépend aussi du choix des deux autres variables v et w. Nous nous bornerons à citer un exemple. Soit

$$\varphi = x^2(x+y+z)yz.$$

on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x(x+y+z)yz + x^2yz.$$

Posons

$$x+y+z = u$$
$$yz = v$$

il vient

$$\varphi = x^2uv.$$

et sous cette forme

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2xuv = 2x(x+y+z)yz.$$

On voit donc que la même fonction φ peut avoir par rapport à la même variable x des dérivées partielles fort différentes et que leur valeur dépend du choix des variables que l'on adjoint à x pour déterminer la fonction et qui doivent rester constantes pendant l'opération.

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

(27). L'accroissement inf^t petit d'une fonction de plusieurs variables peut s'exprimer par une formule analogue à celle que nous avons trouvée dans le cas d'une seule variable et dont l'emploi est souvent fort utile.

Soit d'abord $\varphi(x,y)$ une fonction de deux variables indépendantes l'une de l'autre ; donnons à x et y deux accroissements infiniment petits du 1er ordre h et k. l'accroissement de φ sera :

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)=\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)+\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y).$$

or la différentielle

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)$$

peut être considérée comme l'accroissement de la fonction $\varphi(x+h,y)$, dans laquelle la variable y a reçu l'accroiss^t k. On aura donc en négligeant les inf^t petits du 2e ordre

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)=k\,\varphi'_y(x+h,y).$$

on verra de même qu'en négligeant les inf^t petits du 2e ordre on a

$$\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)=h\,\varphi'_x(x,y)$$

D'après cela on a en négligeant les inf^t petits du 2e ordre

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)=k\,\varphi'_y(x+h,y)+h\,\varphi'_x(x,y)$$

Mais $\varphi'(x+h,y)$ diffère inf^t peu de $\varphi'_y(x,y)$, le produit par k de la différence de ces deux quantités peut être négligé, et l'on peut écrire, toujours en

16v

négligeant les infiniment petits du 2e ordre

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = h\varphi'_x(x,y) + k\varphi'_y(x,y).$$

Si l'on représente par dx et dy les accroissements arbitraires h et k et remplaçant conformément à la notation convenue $\varphi'_y(x,y)$ par $\frac{d\varphi}{dy}$, et $\varphi'_x(x,y)$ par $\frac{d\varphi}{dx}$, cette expression devient $$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy.$$

on la nomme différentielle totale de la fonction et on la représente par le signe $d\varphi$; en sorte que l'on a par définition

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy.$$

et l'on voit par ce qui précède que cette différentielle totale $d\varphi$ représente, en négligeant les infiniment petits du 2e ordre, l'accroissement de la fonction φ correspondant aux accroissements dx et dy de x et de y.

À peine est il nécessaire de faire remarquer que dans le second membre de l'éq. précédente, les numérateurs des fractions $\frac{d\varphi}{dx}$ $\frac{d\varphi}{dy}$ doivent être considérés comme ayant des significations différentes et que ni l'un ni l'autre ne doivent être confondus avec la différentielle totale $d\varphi$ qui s'écrit de même. Le numérateur de $\frac{d\varphi}{dx}$ est la différentielle de φ par rapport à x considéré comme seule variable ; le numérateur de $\frac{d\varphi}{dy}$ est la différentielle de φ par rapport à y considéré comme seule variable enfin le 1er membre est la différentielle totale que nous avons définie plus haut.—

(28). De raisonnements tout semblables montreraient que l'accroissement infᵗ petit d'une fonction de trois variables x, y, z $\varphi(x,y,z)$, lorsque $x\ y\ z$ reçoivent des accroissements infᵗ petits du 1ᵉʳ ordre, h, k, l peut être représenté en négligeant les infᵗ petits du 2ᵉ ordre par

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k + \frac{d\varphi}{dz}l$$

en posant $h = dx$ $k = dy$ $l = dz$, cette somme se nomme la différentielle totale de φ; on a donc par définition

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz$$

et il résulte de la démonstration que si dx dy dz sont infᵗ petits du 1ᵉʳ ordre, $d\varphi$ peut représenter, en négligeant les infᵗ petits du 2ᵉ ordre, l'accroissement de φ correspondant aux accroissements infᵗ petits dx dy dz des trois variables.

Il y aurait lieu de reproduire ici les explications données plus haut au sujet de l'expression $d\varphi$ qui a dans l'équation précédente, deux significations distinctes. —

(29). On peut étendre sans difficulté la définition et les théorèmes précédents au cas d'un nombre qcq de variables, et prouver que l'accroissement d'une fonction $\varphi(x, y, z, u, v)$ correspondant aux accroissements infᵗ petits $h\ k\ l\ m\ n$ des variables peut être représenté, en négligeant les infᵗ petits du 2ᵉ ordre par

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k + \frac{d\varphi}{dz}l + \frac{d\varphi}{du}m + \frac{d\varphi}{dv}n$$

17 r

et si dans cette somme, on représente les quantités arbitraires h k l m, n par dx dy dz du dv, on obtiendra l'expression

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv.$$

que l'on nomme différentielle totale de φ et qui peut remplacer l'accroissement de φ lorsque dx dy dz du dv sont infi[niment petits]

Dérivée d'une fonction composée.

(30). Une fonction composée est une fonction dont la définition implique des opérations à exécuter sur d'autres fonctions qu'il faut préalablement connaître.

Soit $y = F(u, v)$.

une telle fonction, u et v désignant deux fonctions données d'une même variable ; proposons nous de chercher sa dérivée par rapport à x.

Si l'on donne à x un accroissement infiniment petit Δx, il en résultera pour u et v deux accroissements que je désigne par Δu, Δv et l'on aura en négligeant les infiniments petits du 2e ordre

$$\Delta y = \frac{dF}{du}\Delta u + \frac{dF}{dv}\Delta v.$$

D'où l'on conclut

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{dF}{dv}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

et en passant à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

(31) On verrait de même que la dérivée d'une fonction composée de trois autres ~~variables~~ fonctions

$$y = F(u, v, w)$$

s'obtiendrait par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{dF}{dw}\cdot\frac{dw}{dx},$$

et cela quel que soit le nombre des fonctions, ce que l'on peut énoncer en disant que la dérivée d'une fonction composée est la somme des résultats obtenus, en prenant la dérivée de la fonction proposée dans laquelle on considère successivement chacune des fonctions dont elle dépend comme variant seule avec x, toutes les autres étant traitées comme des constantes.

(32). Le théorème précédent peut s'appliquer à la détermination déjà obtenue de la dérivée d'un produit ou d'une expression de la forme u^v.

Soit d'abord $y = uv$.

u et v désignant deux fonctions données de x, ce produit peut être considéré comme une fonction composée de u et v et l'on aura en appliquant le th. précédent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Soit $y = u^v$.

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = v u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v l u \frac{dv}{dx}.$$

18v

Dérivée des fonctions implicites

(33) On désigne sous le nom de fonction implicite toute fonc[tion] bien définie, mais dont l'expression analytique n'est pas connue.

Parmi les fonctions implicites, nous considérerons seulement celles qui sont définies par des éq. non résolues.

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une fonction y définie par une éq. entre cette fonction et la variable x.

$$\varphi(x,y)=0$$

Pour déduire d'une pareille fonction la dérivée, ou ce qui revient au même la différentielle de y, ~~supposons~~ remarquons qu'en supposant y remplacé par sa valeur en x la fonction φ sera identiquement nulle ; on pourra donc égaler sa différentielle à zéro ; on aura par suite

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}$$

et le problème est résolu

(34). Supposons en second lieu que y et z soient deux fonctions liées à x par les équations

$$\varphi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0.$$

Si les équations étaient résolues par rapport à y et z, en y remplaçant les variables par leurs valeurs

les x, elles deviendraient identiques; chacune des 1^r membres aurait p. ex. une différentielle égale à zero et l'on aurait:

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz = 0$$

d'où l'on déduit.

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}}$$

ces équations font connaître les différentielles dz et dy; ou si l'on veut les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

(35). Si le nombre des équations toujours égal à celui des fonctions inconnues, devenait plus considérable, la marche à suivre serait absolument la même, et il n'y aurait rien à changer aux raisonnements; les rapports des différentielles cherchées s'obtenant dans chaque cas par la résolution d'un système d'équations du 1^r degré. Il peut arriver dans des cas particuliers, que les équations rentrent les unes dans les autres, et cette circonstance donne naissance à une discussion importante que nous renvoyons plus loin.

(36). Si les fonctions implicites dépendent de plusieurs variables il n'y a rien à changer à ce qui précède, le calcul de la dérivée par rapport à une des variables devant se faire comme si toutes les autres étaient constantes,

et celles-ci ne figurant dans les calculs qui s'y rapportent que comme des paramètres ~~arbitraires~~ constants qui entreraient dans les formules.

Soient par exemple proposées les équations

$$F(x,y,u,v) = 0$$

$$\varphi(x,y,u,v) = 0$$

en vertu desquelles u et v sont fonctions de x et y. Pour en déduire $\frac{du}{dx}$ $\frac{du}{dy}$ $\frac{dv}{dx}$ $\frac{dv}{dy}$, on fera un 1er calcul dans lequel y sera traité comme constante, et qui fera connaître $\frac{du}{dx}$. $\frac{dv}{dx}$. Un second calcul dans lequel x sera traité comme constant, f[era] connaître $\frac{du}{dy}$ $\frac{dv}{dy}$.

On trouve ainsi en traitant y comme constante

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\,\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 0$$

et par suite

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dF}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{du}\cdot\frac{d\varphi}{dv} - \frac{dF}{dv}\cdot\frac{d\varphi}{du}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{dF}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dF}{du}}{\frac{dF}{du}\cdot\frac{d\varphi}{dv} - \frac{dF}{dv}\cdot\frac{d\varphi}{du}}.$$

On trouverait de même $\frac{du}{dy}$ $\frac{dv}{dy}$.

(37) On pourrait calculer plus simplement les differentielles du, dv, en faisant varier à la fois x et y dans les equations proposées, et ecrivant que l'accroissement qui en résulte pour chacune des fonctions F et φ est égal à zéro. On aura ainsi, en negligeant les infts petits du 2e ordre

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du + \frac{dF}{dv}dv = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv = 0$$

On peut remarquer d'ailleurs que les équations, dans l'établissement desquelles on néglige les infts petits du 2e ordre sont rigoureusement exactes. En effet du et dv sont par définition de la forme

$$P\,dx + Q\,dy$$

et par suite les premiers membres, si l'on y remplaçait du et dv par leurs valeurs, prendraient tous deux la forme

$$M\,dx + N\,dy,$$

M et N étant des fonctions de x, y, u, v.
Or dx et dy étant deux infts petits du 1er ordre arbitraires, une pareille somme, dans laquelle M et N sont indépendants de dx et dy, ne peut être infiniment petite du second ordre que si elle est rigoureusement nulle.

Les deux éq. obtenues ainsi entre du et dv sont donc rigoureuses; en les résolvant on trouvera des expressions de la forme

$$du = P\,dx + Q\,dy$$
$$dv = P_1\,dx + Q_1\,dy.$$

et l'on conclura :

$$\frac{du}{dx} = P \quad \frac{du}{dy} = Q \qquad \frac{dv}{dx} = P_1 \quad \frac{dv}{dy} = Q_1$$

il est d'ailleurs facile de vérifier que les valeurs ainsi trouvées, sont identiques aux précédentes.

(38). Si les relations $F(x, y, u, v) = 0$

$$\varphi(x, y, u, v) = 0$$

restant les mêmes, on voulait considérer x et y comme fonction de u et v, il y aurait lieu de considérer les dérivées partielles

$$\frac{dx}{du} \quad \frac{dy}{du} \quad \frac{dx}{dv} \quad \frac{dy}{dv}.$$

il faut bien remarquer que l'on n'a pas ici

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

les accroissements dont $\frac{dx}{du}$ exprime le rapport ne sont p[as] en effet les mêmes que ceux qui figurent dans $\frac{du}{dx}$. Lorsqu'on calcule en effet la dérivée partielle $\frac{du}{dx}$, u et x varient, y restant constant; et dans le calcul de $\frac{dx}{du}$, c'est v qui doit rester invariable. Or p[our] que v reste invariable, il faut nécessairement que y change; par suite les variations considérées sont tout autres que dans le cas précédent.

Voici un exemple: soient:

$$x = u + v$$
$$y = u - v$$

les relations proposées entre x, y, u, v.

On en déduit

$$u = \frac{x+y}{2} \qquad v = \frac{x-y}{2}.$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{du} = 1 \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

il est donc clair qu'on n'a plus, quand il s'agit de dérivées partielles, la relation

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

On démontrerait facilement que cette relation est remplacée dans le cas ~~actuel~~ de deux fonctions u et v, dépendant de deux variables x et y par

$$1 = \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$0 = \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{dx}{dv}\cdot\frac{dv}{dy}.$$

Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement.

(39) il est impossible de passer en revue toutes les fonctions implicites ; nous nous bornerons à deux fonctions géométriques très simples, l'aire et l'arc d'une courbe plane.

Considérons d'abord l'aire comprise entre une ordonnée fixe d'une courbe plane et l'ordonnée MP correspondant à l'abscisse variable x.

Cette aire NAMP est une fonction implicite de x

dont nous allons chercher la différentielle.

Si l'on attribue à x un accroissement infᵗ petit dx, représenté par PP', l'aire considérée s'accroît du trapèze curviligne $MPM'P'$, auquel on peut substituer le rectangle $MKP'M'$; car cela revient à négliger le triangle infᵗ petit du 2ᵈ ordre. On a donc

$$MKPP' = y\,dx.$$

La différentielle de l'aire considérée est donc $y\,dx$ et sa dérivée par rapport à x est y.

Si la courbe est rapportée à des coord. polaires, on considère habituellement l'aire comprise entre cette courbe, un rayon fixe OA, et le rayon OM correspondant à l'angle ω.

Nous donnons à ω un accroissement infᵗ petit $d\omega = MOM'$ l'aire considérée augm. du secteur MOM'. Si du point O comme centre, avec O pour rayon, on décrit l'arc de cercle MK, on peut substituer à OMM' le secteur OMK; car cela revient à négliger le triangle infᵗ petit du 2ᵈ ordre $MM'K$; mais ce secteur est égal à

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2}.$$

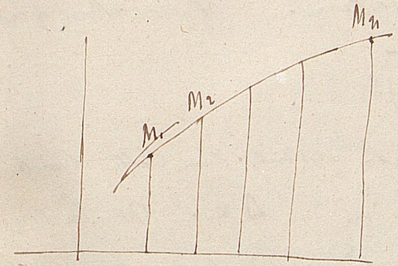
Telle est donc la différentielle de l'aire considérée, et sa dérivée par rapport à $d\omega$ est $\frac{\rho^2}{2}$.

(40). Considérons actuellement l'arc d'une courbe p et d'abord donnons qq développements sur ce que l'on doit entendre par ~~des~~ longueur d'un arc de courbe. La comparaison directe avec la ligne droite qui est l'unité est impossible, il est clair qu'une définition est indispensable

On adopte habituellement la suivante :

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend un polygone inscrit dans cet arc, lorsque les côtés diminuent de plus en plus.

Pour légitimer une pareille définition, il est nécessaire de démontrer que la limite est indépendante de la loi suivant laquelle diminuent les côtés du polygone.



Soient $M_1 M_2 - M_n$ les sommets d'un tel polygone. Si Δx représente la différence entre les abscisses de deux sommets consécutifs et Δy, celle de deux ordonnées correspondantes, la corde qui les réunit aura pour expression

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Or dans la sommation que nous avons à faire on peut, sans changer la limite, remplacer cette corde par une quantité infiniment petite qui ait avec elle un rapport égal à l'unité, à la limite. On peut donc remplacer

$$\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

par

$$\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

en sorte que le polygone considéré a la même limite que

$$\sum \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

le signe Σ indiquant qu'il faut faire la somme des

expression indiquée pour toutes les valeurs de x et de Δx qui répondent aux sommets du polygone considéré. Pour montrer que cette somme a une limite indépend. de la loi suivant laquelle diminuent les côtés, considérons la courbe qui a pour équation

$$y = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

et dans cette courbe, des points ayant précisément même absc. que les sommets du polygone en question. Il est clair que somme

$$\Sigma\, \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sera précisément la somme des rectangles inscrits dans cette courbe ayant pour bases les valeurs successives de Δx. Or la limite la somme des rectangles inscrits est évid. indépend. de la loi suivant laquelle on la fait tendre vers cette limite, et notre assertion se trouve ainsi justifiée.

(41). Quand un arc de courbe est infᵗ petit, on peut le remplacer par sa corde, et l'erreur commise est seulement un infᵗ petit du 3ᵉ ordre.

Pour le démontrer considérons un arc infᵗ petit AMB et sa corde AB. L'arc AMB est par définition la limite d'un polygone inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Si l'on projette chacun de ces côtés sur la corde AB, la somme des projections sera la corde AB elle même. Mais chaque côté en se projetant, se multiplie par le cosinus de l'angle qu'il forme avec

et comme cet angle est inf^t petit du 1^r ordre, la difference de son cosinus avec l'unité est inf^t petite du 2e ordre. Si donc on regarde le polygone inscrit comme egal à sa projection, l'erreur commise est egale à la somme des cotés du polygone multipliés respectivement par des inf^t petits du 2e ordre. elle est donc moindre que le perimètre ~~du polygone~~ inf^t petit du polygone multiplié par le plus grand de ces inf^t petits du second ordre, et par ci elle est du 3e ordre. —

(42). Si nous revenons actuellement à la différentielle de l'arc d'une courbe plane, ce qui precède donne le moyen de l'obtenir bien simplement, soit en coord. rectilignes, soit en coord. polaires.

Soit AM un arc de courbe rapporté aux axes OX OY. Si l'abscisse OP de son extremité M reçoit un accroissement inf^t petit dx, representé par PP', l'arc prend l'accroissement inf^t petit MM' qui est sa différentielle. Or MM' peut être remplacé par sa corde; par ci en designant l'arc AM par s, le triangle MKM' donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

Si la courbe est rapportée à des coord. polaires et qu'on considère un arc variable $AM = s$, dont l'extremité M ait pour coord. ρ, ω; si ω s'accroit de $MOM' = d\omega$ l'arc s s'accroîtra de $MM' = ds$; en remplaçant comme cela est permis, MM' par la corde et abaissant du point M une perpend. sur OM', on a:

23 v

$$\overline{MM'}^2 = \overline{M'P}^2 + \overline{MP}^2$$

Mais M'P diffère de la différentielle $d\rho$ d'une quantité inf^t petite du 2e ordre, car la différence de les deux quantités est le sinus verse de l'angle $d\omega$, dans le cercle de rayon ρ. MP diffère de l'arc d'angle $d\omega$ décrit du point O comme centre avec ρ pour rayon, d'une quantité inf^t petite du 3e ordre; il est dans le cercle de rayon ρ, le sinus de cet arc. On peut donc remplacer $\overline{M'P}^2$ par $d\rho^2$ et $\overline{MP}^2$ par $\rho^2 d\omega^2$. et l'on a:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

$$ds = d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

(43) Considérons actuellement les courbes à double courbure. Nous définirons la longueur d'une telle courbe comme nous avons défini celle d'une ligne plane, la limite d'un polygone inscrit, dont les côtés diminuent indéfiniment. Pour légitimer comme on l'a fait une telle définition il faut prouver, comme on l'a fait, que la limite du périmètre polygonal ne dépend pas de la loi suivant laq. décroissent les côtés

Soient en effet $M_1 M_2 - M_n$ les sommets du polygone inscrit. Si Δx désigne la différence entre les abscisses de deux sommets consécutifs, et Δy Δz, celles des deux autres coord. correspondantes, la corde qui réunit

Ce sommet a pour expression

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

on peut comme on sait remplacer cette corde par une autre inft petite, qui, à la limite, est avec elle un rapport égal à l'unité. On peut donc remplacer

$$\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

par

$$\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

de sorte que le polygone considéré a la même limite que l'expression

$$\Sigma\,\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

pour montrer que cette somme a une limite indépendante de la loi suivant laquelle diminuent les côtés, considérons la courbe dont l'équation est

$$y=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

et dans cette courbe des points ayant précisément les mêmes abcisses que les sommets du polygone en question; il est clair que la somme

$$\Sigma\,\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

sera la somme des rectangles inscrits dans cette courbe et ayant pour bases les valeurs successives de Δx. Or

24r

la limite de la somme des rectangles inscrits est en indépendante de la loi suivant laquelle on les fait décro et notre assertion se trouve ainsi justifiée

(44). Différence entre un arc infiniment petit et sa corde :

En répétant mot pour mot ce qui a été dit, verra que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est un infiniment petit du 3e ordre, et que la différentielle ds d'un arc de courbe à double courbure est donnée par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

(45). Comme application des formules précédentes cherchons la différentielle d'un arc de cycloïde

On trouve facilement pour l'éq. différentielle de cycloïde ~~rapportée à son sommet~~

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} = ~~\sqrt{\ldots}~~$$

la formule $ds^2 = dy^2 + dx^2$ peut s'écrire

$$ds^2 = dy^2\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right) = dy^2\left(1 + \frac{2a-y}{y}\right) = \frac{2a}{y}\, dy^2$$

d'où $\quad ds = \sqrt{2a}\, dy \cdot y^{-\frac{1}{2}}.$

or $dy \cdot y^{-\frac{1}{2}}$ est la différentielle de $2y^{\frac{1}{2}}$

les fonctions s et $2\sqrt{2ay}$ ne diffèrent donc que par une constante, et l'on a :

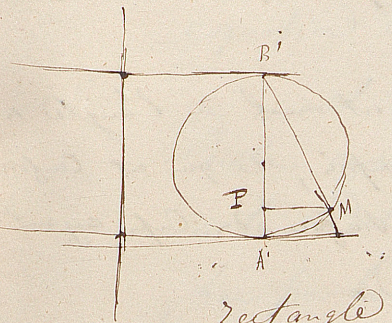
$$S = 2\sqrt{2ay} + C.$$

Si les arcs sont comptés à partir du sommet de la courbe pour lequel on a $y=0$, la constante doit être nulle, et l'on a

$$S = 2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique très simple. —

Soit A' le point de contact du cercle générateur avec la base de la cycloïde ; B' le point diamétralement opposé ; MB' est la tangente à la courbe en M — MA' est la normale. Or dans le triangle



rectangle M'B'A', si l'on abaisse MP perpend. sur l'hypothénuse, on a

$$MB' = \sqrt{A'B' . B'P} = \sqrt{2ay}.$$

Donc $\qquad S = 2MB'$

résultat fort simple que nous retrouverons par d'autres considérations.

(26). Pour seconde application, cherchons l'arc d'un cercle rapporté à des coord. polaires et passant par le pôle. L'éq. d'un tel cercle est

$$\rho = a \cos(\omega - \alpha)$$

École Normale Supérieure

25 v

Si l'on applique la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

on trouve

$$ds^2 = \left\{a^2 \sin^2(\omega - \alpha) + a^2 \cos^2(\omega - \alpha)\right\} d\omega^2 = a^2 d\omega^2$$

$$ds = a d\omega.$$

L'arc s et le produit $a\omega$ ont donc même différentielle et l'on a

$$S = a\omega + C.$$

Si l'arc commence au point pour lequel $\omega = 0$ on a

$$S = a\omega.$$

c. a. d. que l'arc est proportionnel à l'angle entre les côtés duquel il est compris, ce qui est conforme au théorème connu sur la surface des cap[?] ayant le sommet sur une circonférence.

(47). Cherchons si le cercle est la seule courbe qui jouisse de la propriété précédente, et pour cela résolvons le problème suivant:

Quelle est la courbe telle que son arc soit exprimé par la formule. $S = a\omega$.

On en déduit

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = a^2 d\omega^2$$

donc

$$d\rho^2 = d\omega^2 (a^2 - \rho^2).$$

$$d\omega = \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

ou $$d\omega = \frac{d\frac{\rho}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}}$$

Le second membre étant la différentielle de $\arccos\frac{\rho}{a}$, on voit d'après cette équation que ω et $\arccos\frac{\rho}{a}$ ne peuvent différer que par une constante. Donc

$$\omega - c = \arccos\frac{\rho}{a}.$$

$$\rho = a\cos(\omega - c)$$

équation d'un cercle qui passe par le pole.

Il se présente ici une légère difficulté. Un cercle ayant son centre au pole satisfait évidemment à la condition demandée ; pourquoi ne le trouve-t-on pas par la méthode employée. Cela tient à ce que nous avons divisé l'équation par $\sqrt{a^2-\rho^2}$, ce qui n'est pas permis si l'on a $\rho = a$.

Théorie analytique des Tangentes.

Lorsqu'une courbe plane est définie par une équation

$$\varphi(x,y) = 0$$

On peut d'après ce qui précède trouver l'éq. de la tg^te en un quelconque de ses points. On a vu en effet que le coefficient angulaire de cette tangente au point dont les coord. sont x, y est la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x, et ce qui précède donne le moyen de calculer cette dérivée toutes les fois que ~~cette dérivée est connue~~ l'éq. de la courbe est connue.

Si l'on représente par t et u les coord. d'un point q^cq situé sur la tangente touchant la courbe au point dont les coord. sont x, y, l'éq. de la cette tangente MT est

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x)$$

La Normale MN qui lui est perpendiculaire et passe également par le point x, y a pour équation

$$u - y = -\frac{dx}{dy}(t - x).$$

ou si l'on veut

$$(u - y)\,dy + (t - x)\,dx = 0$$

Les axes des coord. étant rectangulaires si l'on abaisse l'ordonnée MP, la ligne PT reçoit le nom de sous-tg^te. PN est la sous normale. MT est la tangente et MN la normale. On a

$$PT = S_t = y\frac{dx}{dy} \qquad MT = t = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$PN = S_n = y\frac{dy}{dx} \qquad MN = N = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On peut remarquer que la sous-tgte et la sous normale sont susceptibles de signes, et que les formules précédentes donnent le signe exactement, si l'on convient de regarder la sous tgte comme positive quand la ligne TP est dirigée dans le sens des x positifs, et la sous normale comme positive quand PN est dirigé dans le même sens.

On a souvent besoin d'introduire dans le calcul les angles formés par la tgte ou la normale à une courbe avec les axes de coordonnées, et il est nécessaire de faire des conventions prévenant toute ambiguité.

Le coefficient angulaire de la tgte est $\frac{dy}{dx}$, si donc α désigne l'angle de cette tgte avec l'axe des X on a

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$$

et α est l'angle formé par la partie positive de l'axe X avec la portion de la tgte située au dessus de cet axe.

Quand on parle des angles λ μ formés par la normale avec les axes des coord., on suppose que de l'origine on abaisse une perpend. sur la tgte et que les angles sont formés par la perpendiculaire, prise dans l'un ou l'autre sens, avec la direction des axes positifs. Les deux angles sont affectés d'après cela d'une certaine indétermination; en changeant le sens dans lequel la perpend. est considérée, on fait les changer tous deux à la fois en leurs suppléments; mais le rapport des cosinus est déterminé et l'on a toujours

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} = -\frac{dx}{dy}$$

ou plus simplement

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy = 0.$$

Si l'eq. de la courbe est sous la forme

$$F(x,y) = 0$$

le rapport $\frac{dy}{dx}$ est toujours fourni par l'équation

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0$$

d'après laquelle l'équation précédente équivaut à

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\cos\lambda} = \frac{\frac{dF}{dx}}{\cos\mu}$$

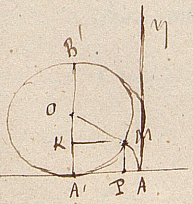
Ainsi donc les cosinus des angles que forme la normale à une courbe avec les axes des coord. sont proportionnels aux dérivées du 1er membre de l'eq. de la courbe.

La somme des carrés de ces cosinus étant pour une droite qcq égale à l'unité, on en déduit

$$\cos\lambda = \frac{\pm \frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}} \qquad \cos\mu = \frac{\pm \frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être pris ensemble.

Je donnerai ici qlq exemples. — Cherchons d'abord la tgte à la cycloïde — soit AX la droite sur laquelle roule le cercle générateur, A le point de contact du cercle dans sa position initiale, A' ce même point de contact dans une seconde position, M le point générateur, dans cette 2e position du cercle; on aura d'après la définition même du roulement



$$A'M = AA'.$$

Si l'on prend pour axe des x la droite AX et une perpend. en A pour axe des y, on aura

$$MP = y \qquad AP = x.$$

Si l'on désigne par a le rayon du cercle et par u l'angle variable MOA', on a

$$y = OA' - KO = a - a\cos u$$

$$x = AA' - A'P = au - a\sin u$$

Ces deux équations donnent par l'élimination de u, l'éq. de la cycloïde ; mais cette élimination n'est pas nécessaire pour avoir le rapport $\frac{dy}{dx}$.

On a en effet en différentiant les deux éq. précédentes

$$dy = a\sin u\,du$$

$$dx = a(1-\cos u)\,du$$

D'où $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1-\cos u} = \cot g\,\tfrac{1}{2}u.$$

Le coefficient angulaire de la tangente étant égal à $\cot g\,\frac{1}{2}u$, l'angle de la tgte avec l'axe des x est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$, et la normale fait avec le même axe l'angle $\frac{u}{2}$; on en conclut que la normale est $M'A'$ et la tgte $M'B'$.

De l'expression $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{1}{2}u$ on peut déduire l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en fonction de y. On a en effet

$$\cos u = \frac{a-y}{a}$$

$$\sin u = \sqrt{\frac{2ay-y^2}{a^2}}$$

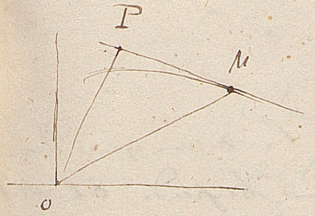
$$1-\cos u = \frac{y}{a}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot g \tfrac{1}{2} u = \frac{\sin u}{1-\cos u} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

Cette équation prend une autre forme, si laissant les axes parallèles à leur direction actuelle et changeant seulement le sens de l'axe des y, on transporte l'origine des coord. au sommet de la courbe, dont l'ordonnée actuelle est $2a$; la formule de transformation sera $\quad y = 2a - y_1$,

l'équation deviendra, en supprimant l'indice de y

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$



Problème. D'un point O, pris dans un plan, on abaisse des perpend. sur les tangentes d'une courbe située dans ce plan; déterminer la tgte à la courbe lieu des ~~...~~ pieds de ces perpendiculaires.

Prenons le point O pour origine.

Soient $x_1 y_1$ les coord. du point M. — l'éq. de la ~~tgte~~ MP est $\quad y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \qquad (1)$

Celle de OP est
$$y = -\frac{dx_1}{dy_1}\, x. \qquad (2)$$

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on éliminait y_1 et x_1, on aurait l'équation de la courbe lieu des points P; mais pour obtenir la tgte cette élimination n'est pas utile. Éliminons en effet, entre (1) et (2) le rapport $\frac{dy_1}{dx_1}$, nous obtiendrons la relation suivante qui a lieu entre les coord. $x_1 y_1$ du point M et les coord. $x\, y$ du point P.

$$y - y_1 = -\frac{x}{y}(x - x_1)$$

ou
$$y^2 + x^2 - yy_1 - xx_1 = 0.$$

29r

Differentiant cette eq. il vient:

$$2y\,dy + 2x\,dx - y\,dy_1 - y_1\,dy - x\,dx_1 - x_1\,dx = 0.$$

Or à cause de

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x}{y}$$

on a $\quad y\,dy_1 + x\,dx_1 = 0.$

L'equation precedente devient donc

$$2y\,dy + 2x\,dx = y_1\,dy + x_1\,dx.$$

d'où l'on deduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x_1}{2} - x}{y - \frac{y_1}{2}}$$

ce qui montre que la tg^te cherchée est perpend. à la ligne qui joint le point P au milieu C de OM. dont les coordonnées sont $\frac{x_1}{2}$ $\frac{y_1}{2}$.

Probleme. Les données étant les mêmes que dans question precedente, supposons que chaque perpend. OP soit prolongée jusqu'en un point Q tel que

$$OP.OQ = a^2$$

trouver la tg^te à la courbe lieu des points Q.

L'equation de la tg^te MP étant

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$$

et la perpend. OP ~~étant~~ ayant pour éq.

$$y = -\frac{dx_1}{dy_1}x.$$

on a d'ailleurs

$$\overline{OQ}^2 = y^2 + x^2 = \frac{a^2}{\overline{OP}^2} = \frac{a^2\left(1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right)}{\left(y_1 - x\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}.$$

en remplacant $\frac{dy_1}{dx_1}$ par $-\frac{x}{y}$, il vient:

$$y^2+x^2 = \frac{a^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{\left(y_1+\frac{x_1 x}{y}\right)^2}$$

ou en réduisant

$$yy_1 + xx_1 = a.$$

en differentiant cette equation il vient

$$y_1 dy + y dy_1 + x_1 dx + x dx_1 = 0$$

Mais on a comme dans le problème precedent

$$y dy_1 + x dx_1 = 0$$

Donc $\qquad y_1 dy + x_1 dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$$

C'est à dire que la tg^te cherchée est perpend. à la droite OM. —

(54). On a pu remarquer dans la solution des deux problèmes précédents que certains termes disparaissant d'eux mêmes de l'équation obtenue par la differentiation, donnaient lieu à une grande simplification dans les calculs. Cette simplification tient à une circonstance géométrique commune aux deux problèmes précédents, et se produiraient également dans tous les cas analogues. Voici l'énoncé général du problème pour lequel elle a lieu:

Determiner la tangente à une courbe dont les

points se déduisent suivant une certaine loi des tangentes à une autre courbe donnée.

Soit $\varphi(x, y) = 0$

l'équation de la courbe donnée. Une de ses tg. a pour équation

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x).$$

Les coordonnées $x_1\ y_1$ du point correspondant de la cherchée doivent être des fonctions déterminées et données des coefficients de cette équation, et l'on doit avoir p.

$$x_1 = F_1\left(\frac{dy}{dx},\ y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y_1 = F_2\left(\frac{dy}{dx},\ y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

Pour déduire de ces équations le rapport $\frac{dy_1}{dx_1}$ qui est le coefficient angulaire de la tg.te cherchée, posons

$$\frac{dy}{dx} = u \qquad y - x\frac{dy}{dx} = v.$$

$$x_1 = F_1(u, v) \qquad y_1 = F_2(u, v).$$

on aura

$$dx_1 = \frac{dF_1}{du}du + \frac{dF_1}{dv}dv.$$

$$dy_1 = \frac{dF_2}{du}du + \frac{dF_2}{dv}dv.$$

Mais $\quad dv = d(y - ux) = dy - u\,dx - x\,du$

or à cause de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = u$$

cette valeur de dv se réduit à $-x\,du$, et l'on

$$dx_1 = \frac{dF_1}{du}du - x\frac{dF_1}{dv}du$$

$$dy_1 = \frac{dF_2}{du}du - x\frac{dF_2}{dv}du.$$

et en divisant

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dF_2}{du} - x\frac{dF_2}{dv}}{\frac{dF_1}{du} - x\frac{dF_1}{dv}}$$

Ce qui donne la solution du problème; la simplification du résultat tient à ce que les termes en dx et dy disparaissant d'eux mêmes, le rapport $\frac{dy_1}{dx_1}$ a pu se déterminer sans qu'il soit nécessaire $\frac{du}{dx}$, qui sans cette circonstance aurait figuré dans son expression. —

On voit que les termes en dx et dy se détruisant, les calculs sont les mêmes que si, en passant d'une tangente à la tgte infᵗ voisine, on se contentait de faire varier le coefficient angulaire u, sans changer les coordonnées du point de départ x et y; et p.c. la tgᵗᵉ cherchée est la même que si la droite qui sert à déterminer les différents points de la courbe tournait autour d'un point fixe.

(56). On porte une longueur constante l sur la normale d'une courbe plane donnée; trouver la tgte à la courbe lieu des points ainsi obtenus.

Soient x y les coord. d'un point de la courbe donnée, t u, les coordonnées du point correspondant de la courbe cherchée; en nommant λ et μ deux angles que la normale forme avec les axes, on aura coord.

31 v

$$t = x + l\cos\lambda$$
$$u = y + l\cos\mu.$$

On en déduit :

$$dt = dx + l\, d\cos\lambda$$
$$du = dy + l\, d\cos\mu.$$

Multiplions la 1ère de ces équations par $\cos\lambda$ et la 2e par $\cos\mu$, et ajoutons, il viendra

$$\cos\lambda\, dt + \cos\mu\, du = dx\cos\lambda + dy\cos\mu + l\left(\cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu\right)$$

Mais à cause de $\cos^2\lambda + \cos^2\mu = 1$

$$\cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu = 0$$

et d'ailleurs $dx\cos\lambda + dy\cos\mu = 0$

Donc $\cos\lambda\, dt + \cos\mu\, du = 0.$

c. à d. $\dfrac{dt}{du} = -\dfrac{\cos\mu}{\cos\lambda}$

et par suite $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{dy}{dx}.$

Par suite les tangentes aux deux courbes sont parallèles aux points correspondants.

Tangentes aux courbes en coordonnées polaires.

(57). Lorsqu'une courbe est définie par une équation en coordonnées polaires

$$F(\omega, \rho) = 0$$

on peut facilement déterminer en chaque point la direction de sa tangente.

Soit M un point donné sur la courbe ayant pour coord. ρ, ω. M' un point voisin. Menons les rayons vecteurs OM, OM' et du point O comme centre avec OM pour rayon décrivons un arc de cercle MP terminé à OM'. On aura évidemment

$$OM = \rho \qquad \text{arc } MP = \rho\, d\omega.$$

de plus M'P étant l'accroissement infiniment petit de ρ peut être considéré comme égal à $d\rho$.
Or on a dans le triangle MM'P

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{\sin MM'P}{\sin M'MP}$$

à la limite, le triangle MM'P est rectangle; $\frac{MP}{M'P}$ tend vers $\frac{\rho\, d\omega}{d\rho}$ et le rapport $\frac{\sin MM'P}{\sin M'MP}$ devient égal à la tangente de l'angle V formé par le rayon vecteur avec la portion de la tangente dirigée du côté vers lequel la valeur de ω décroît; on a donc

$$tg\, V = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}.$$

(58). On désigne quelquefois sous le nom de tangente, normale, sous tangente, sous normale quatre lignes que je vais définir.

Élevons par le pôle O une perpendiculaire au rayon vecteur. Soit I l'intersection de cette perpend. avec la tgte et N son intersection avec la normale; MI se nomme la tangente, MN la normale, OI la sous-tangente, ON la sous normale. Le calcul de ces 4 lignes n'offre aucune difficulté; on a

$$OI = S_t = \rho \, tg\, V = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}.$$

$$ON = S_n = \frac{\rho^2}{OI} = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

$$MI = t = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{d\omega^2}{d\rho^2}} \quad \# \ \rho^2$$

$$MN = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}.$$

---

(59) Comme application des formules précédentes, déterminons la tangente à la spirale d'Archimède dont l'équ. est

$$\rho = a\omega$$

Nous avons

$$tg\, V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\rho}{a}.$$

$$S_n = \frac{d\rho}{d\omega} = a.$$

---

(60). Considérons la spirale $\rho = a e^{m\omega}$

$$tg\, V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = a e^{m\omega} \frac{1}{m a e^{m\omega}} = \frac{1}{m}.$$

(61) Nous terminerons en faisant une dernière application de la théorie des tangentes.

(62). On donne une courbe quelconque; d'un point fixe O situé dans son plan on mène à cette courbe des rayons vecteurs qu'on prolonge d'une quantité l: trouver la tangente à la courbe, lieu des points ainsi obtenus.

Prenons des coordonnées polaires et le point O pour pôle si l'équation de la courbe donnée est

$$\rho = \varphi(\omega)$$

Celle de la courbe que l'on en déduit sera

$$\rho = l + \varphi(\omega).$$

La sous normale étant exprimée par $\frac{d\rho}{d\omega}$ a la même valeur pour les deux courbes; ensuite que les normales aux deux points correspondants sont concourants sur la perpendiculaire au rayon vecteur menée par le point O. De là resulte une construction simple pour la normale et par suite pour la tangente.

Tangentes aux courbes à double courbure

Soient
$$\varphi(x, y, z) = 0$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

les équations d'une courbe à double courbure. Proposons nous de déterminer la tangente en un point donné.

33v

La tangente est la limite de la ligne qui joint un point dont les coord. sont x, y, z à un point voisin dont les coord. sont $x+dx$ $y+dy$ $z+dz$

On sait qu'une erreur infᵗ petite du 2ᵉ ordre commise sur les coordonnées de ce point n'altère en rien la direction de la ligne cherchée. Si t, u, v désignent les coordonnées d'un pᵗ quelconque de la tangente, on aura évid. d'après cela

$$\frac{t-x}{dx} = \frac{u-y}{dy} = \frac{v-z}{dz}$$

et p. c. il suffit de trouver 3 quantités proportionnelles à dx dy dz, et d'écrire que ces quantités sont aussi proportionnelles à $t-x$, $u-y$ $v-z$; on aura des relation entre les coordonnées d'un pᵗ qcq de la tangente. Or les quantités proportionnelles à dx dy dz ont été trouv[ées]; on a

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}}$$

et les équation de la tangente sont :

$$\frac{t-x}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}} = \frac{u-y}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}} = \frac{v-z}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}}$$

On peut donner à ces équations une autre forme — remarquons en effet qu'elles expriment qu'il y a proport[ionnalité] entre dx dy dz et les différences $t-x$, $u-y$, $v-z$. Or les rapports des différentielles dx dy dz sont donnés par les équations :

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0$$
$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz = 0.$$

Si donc on écrit:

$$\frac{d\varphi}{dx}(t-x) + \frac{d\varphi}{dy}(u-y) + \frac{d\varphi}{dz}(v-z) = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx}(t-x) + \frac{d\psi}{dy}(u-y) + \frac{d\psi}{dz}(v-z) = 0$$

On aura exprimé que les différences $t-x$, $u-y$ $v-z$ ont les mêmes rapports que dx dy dz et leur sont par conséquent proportionnelles. Les deux équations, qui représentent deux plans, sont donc, s. l'ouvert, les deux éq. de la tangente cherchée. —

L'équation de la tangente à une courbe conduit sans difficulté à celle du plan normal. Il suffit en effet de remarquer, pour obtenir ce plan, qu'il passe par le point donné dont les coord. sont x, y, z et qu'il est perpend. à la tangente. En appliquant les formules de géométrie analytique, on trouve que l'éq. de ce plan

$$(t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = 0.$$

dans laquelle dx dy dz doivent être remplacés par les binomes qui leur sont proportionnels. On peut d'ailleurs démontrer directement cette équation.

Soit t u v les coord. d'un point qcq de l'espace. $t-x$, $u-y$ $v-z$ sont trois quantités proportionnelles aux cosinus des angles formés avec les axes par la droite qui joint ce point au point x, y, z donné sur la courbe. Mais

34 v

dx dy dz sont proportionnels aux cosinus des angles formés par la tangente et la courbe avec les mêmes axes; par suite pour que les deux directions soient perpendiculaires, c. a. d. pour que le point t, u, v appartienne au plan normal, est precisement

$$(t-x)\,dx + (u-y)\,dy + (v-z)\,dz = 0.$$

Théorie analytique du plan tangent.

(64). Si l'equation d'une surface en coordonnées rectilignes est

$$F(x,y,z) = 0$$

et qu'on attribue a x et y des accroissements infts petits dx dy, l'accroissement correspondant de z pourra être consideré, en negligeant les infts petits du 2e ordre comme satisfaisant a la relation:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0$$

de sorte que autour du point dont les coord. sont x, y, et à une distance inft petite de ce point, l'accroissement de z peut être consideré comme une fonction lineaire des accroissements de x et de y. Si donc on nomme t, les coordonnées d'un point de la surface inft voisin du point x, y, z, on a en negligeant les infts petits du second ordre

$$\frac{dF}{dx}(t-x) + \frac{dF}{dy}(u-y) + \frac{dF}{dz}(v-z) = 0$$

Cette équation étant du 1r degré en t, u, v

représente un plan, qui évid. passe par le point x, y, z et qui pour les points infᵗ voisins, est à une distance infᵗ petite du second ordre de la surface considérée. Car pour les mêmes valeurs de t et de u, la coordonnée v qui convient au plan diffère d'un infᵗ petit du 2ᵉ ordre de celle qui convient à la surface. Ce plan est le plan tgᵗ à la surface au point considéré; nous allons prouver en effet qu'il contient les tangentes à toutes les courbes situées sur elle et passant par ce point.

Si en effet sur une de ces courbes, on considère un point infᵗ voisin de $x\, y\, z$, ce point est à une distance infᵗ petite du 2ᵉ ordre du plan en question; on peut donc sans altérer la direction limite de la droite qui le réunit au point $x\, y\, z$ supposer qu'il soit rigoureusement situé dans ce plan. La droite limite qui n'est autre chose que la tangente à la courbe considérée, est donc toujours située dans le même plan, et le théorème est démontré.

(65). Le th. peut se démontrer à l'aide des formules données pour la détermination de la tangente à une courbe à double courbure.

Reprenons en effet l'éq.

$$F(x, y, z) = 0$$

de la surface donnée et considérons la courbe

qui résulte de l'intersection de cette surface avec une seconde surface dont l'équation est

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

et qui passe par le point considéré, x, y, z. La tang. à cette courbe est, comme on l'a vu, représentée par le système de deux équations

$$\frac{dF}{dx}(t-x) + \frac{dF}{dy}(u-y) + \frac{dF}{dz}(v-z) = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(t-x) + \frac{d\varphi}{dy}(u-y) + \frac{d\varphi}{dz}(v-z) = 0.$$

Si la seconde surface est remplacée par une autre assujettie seulement à passer par le point donné, la courbe d'intersection pourra prendre toutes les situations sur la surface, et sa tgte se déplacera ; mais l'équation

$$\frac{dF}{dx}(t-x) + \frac{dF}{dy}(u-y) + \frac{dF}{dz}(v-z) = 0$$

restant la même représente un plan dont cette tangente sortira pas, et qui est précisément le plan tangent trouvé par d'autres considérations.

(66) Si l'équation de la surface est résolue par rapport à z

$$z = \psi(x, y)$$

celle du plan tangent prend la forme

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t-x) + \frac{dz}{dy}(u-y).$$

il est bon de la mentionner, parce qu'elle est d'un fréquent usage.

(67). — En supposant les axes de coord. rectangulaires, l'éq. du plan tangent permet de former facilement les équations de la Normale. La Normale fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$\frac{dF}{dx} \quad \frac{dF}{dy} \quad \frac{dF}{dz}.$$

et les équations sont :

$$\frac{t-x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{u-y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{v-z}{\frac{dF}{dz}}$$

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme :

$$z = \psi(x,y)$$

Celles de la Normale deviennent :

$$\frac{t-x}{\frac{dz}{dx}} = \frac{u-y}{\frac{dz}{dy}} = -(v-z)$$

C'est à dire

$$t-x+(v-z)\frac{dz}{dx}=0$$

$$u-y+(v-z)\frac{dz}{dy}=0$$

(68). On peut distinguer, à partir de chaque point d'une surface, deux directions opposées pour la Normale ; nous les nommerons directions intérieure et extérieure, la direction extérieure se dirigeant vers les points de l'espace pour lesquels

$$F(x,y,z) > 0$$

et la direction intérieure se dirigeant vers les points pour lesquels on a

$$F(x,y,z) < 0.$$

Ces deux conventions sont d'ailleurs arbitraires ; on pourrait les changer l'une dans l'autre.

36 v°

Si $\lambda\ \mu\ \nu$ désignent les angles de la normale extérieure avec les axes de coordonnées, on aura toujours :

$$\cos\lambda = \frac{+\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{+\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+ \ldots}}$$

$$\cos\nu = \frac{+\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+ \ldots}}$$

Il est clair en effet que les trois cosinus étant proportionnels à $\frac{dF}{dx}\ \frac{dF}{dy}\ \frac{dF}{dz}$, et la somme de leurs carrés égale à l'unité, leur valeur est précisément celle que l'on vient d'écrire ou leur est égale et de signe contraire.

Cela posé, nommons ε une ~~[illegible]~~ longueur infiniment petite portée sur la normale extérieure ; les coord. de l'extrémité de cette longueur seront

$$x+\varepsilon\cos\lambda$$
$$y+\varepsilon\cos\mu$$
$$z+\varepsilon\cos\nu$$

et l'on aura en négligeant les infiniment petits du 2e ordre

$$F(x+\varepsilon\cos\lambda,\ y+\varepsilon\cos\mu,\ z+\varepsilon\cos\nu) - F(x.y.z) = \frac{dF}{dx}\varepsilon\cos\lambda + \frac{dF}{dy}\varepsilon\cos\mu \ldots$$

Mais par hypothèse $F(x.y.z)=0$

De plus $\cos\lambda = \dfrac{\pm \frac{dF'}{dx}}{\sqrt{}}$

$$\cos\mu = \frac{\pm \frac{dF'}{dy}}{\sqrt{}}$$

$$\cos\nu = \frac{\pm \frac{dF'}{dz}}{\sqrt{}}$$

et par conséquent ~~pour la normale~~

$$F'(x+\varepsilon\cos\lambda,\ y+\varepsilon\cos\mu,\ z+\varepsilon\cos\nu) = \pm \frac{\left(\left(\frac{dF'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF'}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF'}{dz}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{dF'}{dx}\right)^2+}}\,\varepsilon$$

or pour que la normale soit extérieure, il faut que le 1er membre soit positif; il convient donc d'adopter le signe supérieur ainsi que nous l'avions annoncé.

(69). La direction de la normale ayant une très grande importance, il ne sera pas inutile de donner une seconde manière de la déterminer indépendamment du plan tangent.

Si $F'(x,y,z)=0$

est l'équation d'une surface, et que partant d'un point de cette surface on passe à un point voisin dont les coord. seront $x+dx$ $y+dy$ $z+dz$, la fonction F' devant rester nulle quand on substitue aux trois variables les nouvelles valeurs, l'accroissement infᵗ petit sera égal à zero et l'on aura

$$\frac{dF'}{dx}dx + \frac{dF'}{dy}dy + \frac{dF'}{dz}dz = 0,$$

Cette équation exigeant seulement qu'on néglige les infᵗ petits du second ordre et devenant rigoureusement exacte si comme cela est permis, on néglige dans l'évaluation des accroissemens dy, dz une partie infᵗ petite de leur valeur.

Or cette équation prouve que la direction qui fait avec les axes des ~~cosinus~~ angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ $\frac{dF}{dz}$ est perpendiculaire à celle qui forme des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx dy dz; cette dernière direction étant celle de la droite qui joint deux points infᵗ voisins de la surface est celle d'une quelconque de ses tangentes, et la première est pes. la ~~droite~~ direction d'une droite perpend. à toutes les tangentes, c. a. d. de la normale.

(76). Nous ferons quelques applications du plan tangent.

Considérons la surface dont l'équation est

$$x - az - \varphi(y - bz) = 0$$

c'est l'équation d'une surface cylindrique. L'éq. de son plan tangent est d'après les formules précédentes

$$(t - x) - (u - y)\cdot\varphi'(y - bz) - \cdot(a - b\varphi'(y - bz))(v - z) =$$

les cosinus des angles formés par la normale avec les axes des coordonnées sont proportionnels à

$$1\ ,\ -\varphi'\ ,\ -a + b\varphi'.$$

et comme on a

$$a+(-\varphi')b+(b\varphi'-a)=0$$

on voit que cette direction est perpendiculaire à la droite dont les équations sont

$$x=az$$
$$y=bz.$$

et que par suite le plan tangent est constamment parallèle à cette droite.

Soit en second lieu la surface dont l'éq. est

$$ax+by+z=\varphi(x^2+y^2+z^2)$$

et qui est une surface de révolution, ayant pour axe la droite

$$x=az$$
$$y=bz.$$

le plan tangent a pour équation :

$$(t-x)(a-2x\varphi')+(u-y)(b-2y\varphi')+(v-z)(1-2z\varphi')=0$$

et la normale a pour équations

$$\frac{t-x}{a-2x\varphi'}=\frac{u-y}{b-2y\varphi'}=\frac{v-z}{1-2z\varphi'}$$

On peut en conclure que cette normale rencontre constamment l'axe dont les équations sont :

$$t=av$$
$$u=bv.$$

Si en effet, dans les équations de la normale, on remplace t par av et u par bv, elles deviennent

$$\frac{av-x}{a-2x\varphi'}=\frac{bv-y}{b-2y\varphi'}=\frac{v-z}{1-2z\varphi'}$$

auxquelles on peut satisfaire en posant

$$r = \frac{1}{2q'}$$

(71). — Pour 3e application, supposons que sur les normales d'une surface donnée, on porte, à partir de leurs points de départ, une longueur constante l, cherchons la normale à la surface, lieu des points ainsi obtenus.

Soient x, y, z les coord. d'un point de la surface donnée α, β, γ les angles que la normale, en ce point fait avec les axes l la longueur que l'on porte sur cette normale, x_1, y_1, z_1 les coordonnées son extrémité, on a évid.

$$x_1 = x + l\cos\alpha \quad , \quad y_1 = y + l\cos\beta \quad z_1 = z + l\cos\gamma$$

en différentiant, il vient

$$dx_1 = dx + l\,d\cos\alpha \quad , \quad dy_1 = dy + l\,d\cos\beta \quad , \quad dz_1 = dz + l\,d\cos\gamma$$

si l'on multiplie les équations respectivement par $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$ et qu'on ajoute, on obtient

$$\cos\alpha\, dx_1 + \cos\beta\, dy_1 + \cos\gamma\, dz_1 = \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz$$
$$+ l\left(\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma\right)$$

Or on a $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

d'où $\quad \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0$

D'ailleurs la direction de la normale étant perpend. à celle formant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx dy dz, on a

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0$$

on a donc enfin : $\cos\alpha\, dx_1 + \cos\beta\, dy_1 + \cos\gamma\, dz_1 = 0$.

d'où l'on conclut que la direction qui forme avec les axes angles dont les cosinus sont proportionnels à dx_1 dy_1 dz_1 est perpendiculaire à celle qui forme les angles α β γ.

Or la première de ces directions est une tangente qcq à la surface lieu des points $x_1\ y_1\ z_1$, et la seconde est p.c.s. la normale

Les deux surfaces considérées ont donc la même normale, et l'on dit qu'elles sont parallèles. —

(72) – On abaisse d'un point O une perpend. sur le plan tangent à une surface donnée par son équation

$$F'(x, y, z) = 0.$$

et l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'en un point Q tel qu'on ait

$$OP . OQ = a^2$$

a étant une ligne donnée. trouver le plan tangent à la surface lieu des points Q.

Soient x, y, z les coord. du point de contact du plan tangent à la surface donnée. L'équation de ce plan est

$$\frac{dF'}{dx}(t-x) + \frac{dF'}{dy}(u-y) + \frac{dF'}{dz}(v-z) = 0$$

Si l'on prend le point O pour origine, la perp. OP a pour équation

$$\frac{t}{\frac{dF}{dx}} = \frac{u}{\frac{dF}{dy}} = \frac{v}{\frac{dF}{dz}}$$

et si l'on nomme $x_1\ y_1\ z_1$ les coordonnées du point Q on aura p.c.s

$$\frac{x_1}{\frac{dF'}{dx}} = \frac{y_1}{\frac{dF}{dy_1}} = \frac{z_1}{\frac{dF'}{dz}}$$

38 bis N

D'ailleurs

$$\overline{OQ}^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 = \frac{a^4}{\overline{OP}^2} = \frac{a^4\left(\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right)}{\left(x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

éliminant $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ $\frac{dF}{dz}$ entre cette éq. et les précédentes, vient

$$a^4 = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

et cette seule équation suffit, comme nous allons le voir, pour détermination du plan tgt cherché ; elle donne en effet par la différentiation :

$$0 = xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 + x_1dx + y_1dy + z_1dz.$$

Or on a $\quad x_1dx + y_1dy + z_1dz = 0$

car la direction OP forme avec les axes des ~~cosinus~~ angles dont les cosinus ~~sont~~ proportionnels à x_1, y_1, z_1 ; et elle est perpendiculaire au plan tangent de la surface donnée au point x, y, z, et p.c.s. à la direction qui forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx dy dz

On a donc enfin

$$xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 = 0$$

cette relation exprime que la direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx_1 dy_1 dz_1 est perpendiculaire à celle qui forme des angles dont les cosinus sont proportionnels à x, y, z ; c.à.d. que la tangente qcq à la surface lieu des points Q est perpendiculaire à la droite OM qui joint l'origine des coordonnées au point dont les coord. sont x, y, z

Ainsi donc le plan tangent cherché est perpendiculaire à OM.

Appliquons enfin la méthode du plan tangent à la détermination de la loi suivant laquelle se déplace le plan tangent à une surface réglée aux différents points d'une même génératrice rectiligne.

Soient
$$x = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$
$$y = z f(\alpha) + F(\alpha)$$

les équations d'une génératrice qui, par la variation du paramètre α, occupe dans l'espace une suite de positions dont l'ensemble forme la surface considérée. Pour simplifier sans changer en rien la loi que nous cherchons, supposons que pour une valeur de α, $\alpha = 0$ par ex. la génératrice coïncide avec l'axe des z ; il faut et il suffit pour cela qu'on ait

$$\varphi(0) = 0 \qquad \psi(0) = 0$$
$$f(0) = 0 \qquad F(0) = 0$$

Cherchons comment varie le plan tangent qui touche la surface aux différents points de l'axe des z ; tous ces plans devant aussi contenir l'axe des z, leur équation ne contiendra pas z, et l'on ne peut pas faire usage de la formule

$$v - z = (t - x)\frac{dz}{dx} + (u - y)\frac{dz}{dy}.$$

Car on trouverait nécessairement que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont infinis ; il convient donc de changer les coordonnées les unes dans les autres, ceci est permis car rien ne les distingue

39 v°

essentiellement, nous adopterons la formule

$$u - y = (t-x)\frac{dy}{dx} + (v-z)\frac{dy}{dz}$$

L'équation ne devant pas renfermer la lettre v, coord. parall. à l'axe des z, on devra avoir $\frac{dy}{dz} = 0$; mais le calcul même va nous l'apprendre.

Pour calculer le $\frac{dy}{dx}$ je différentie les éq. de la gén. en y traitant z comme constant, il vient

$$dx = \left(z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)\right)d\alpha$$

$$dy = \left(z f'(\alpha) + F'(\alpha)\right)d\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z f'(\alpha) + F'(\alpha)}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}$$

et comme pour le point considéré $\alpha = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z f'(0) + F'(0)}{z\varphi'(0) + \psi'(0)}$$

Pour calculer $\frac{dy}{dz}$, différentions les deux équations en y considérant x comme constant, nous aurons

$$0 = \left(z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)\right)d\alpha + \varphi(\alpha)\,dz$$

$$dy = \left(z f'(\alpha) + F'(\alpha)\right)d\alpha + f(\alpha)\,dz$$

et de là en éliminant $d\alpha$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\varphi(\alpha)\left(z f'(\alpha) + F'(\alpha)\right)}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)} + f(\alpha)$$

ce qui pour $\alpha = 0$ devient nul à cause de l'hypothèse $\varphi(0) = 0 \quad f(0) = 0$.

L'equation du plan tgt cherché est alors

$$u-y=(t-x)\frac{z f'(0)+F'(0)}{z\varphi'(0)+\psi'(0)}$$

en posant $f'(0)=a$ $F'(0)=b$ $\varphi'(0)=m$ $\psi'(0)=n$

On voit que l'angle θ formé par le plan tgt avec le plan ZOX est donné par la formule

$$tg\,\theta=\frac{az+b}{mz+n}.$$

Si l'on substitue à ce plan des ZX un nouveau plan faisant avec lui l'angle φ, l'inclinaison θ' sur ce nouveau plan sera donnée par la formule

$$tg\,\theta'=tg(\theta-\varphi)=\frac{az+b-(mz+n)\,tg\,\varphi}{mz+n+(az+b)\,tg\,\varphi}$$

et si φ est choisi de telle sorte que

$$m+a\,tg\,\varphi=0$$

on aura

$$tg\,\theta'=\frac{(a-m\,tg\,\varphi)z}{n+b\,tg\,\varphi}+\frac{b-n\,tg\,\varphi}{n+b\,tg\,\varphi}.$$

Ainsi la tangente de l'angle formé par le plan tgt avec un plan fixe, conduit suivant la génératrice, est exprimée par une fonction de la forme

$$Gz+H.$$

Si l'on transporte l'origine des coordonnées en un point de l'axe des Z dont l'ordonnée actuelle soit

$$z' = -\frac{H}{G}$$

on devra remplacer z par $z+z'$ et l'expression de $tg\theta'$ devient simplement

$$Gz$$

Nous voyons donc que la tangente de l'angle formé par le plan tangent avec un plan fixe, est proportionnel à la dista[nce] du point de contact à un point convenablement choisi sur la generatrice.

Dans certains cas la constante designée par G e[st] nulle, et le même plan est tangent en tous les points [de] la génératrice.

Cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi, non seulement pour une génératrice isolée, mais pour toutes les generatrices de la surface.

reprenons les equations

$$x = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

$$y = z f(\alpha) + F(\alpha)$$

qui representent une generatrice quelconque. Pour que le plan tangent soit le même tout le long de cette generat[rice] il faut que les deux coefficients differentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ soi[ent] fonction de la seule variable α et conservent la même valeur tant que α ne change pas.

Calculons par exemple $\frac{dz}{dx}$, et pour cela

differentiant les deux equations en y considérant y comme constante nous aurons.

$$dx = dz\,\varphi(\alpha) + \left(z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)\right)d\alpha$$
$$0 = dz\,f(\alpha) + \left(zf'(\alpha) + F'(\alpha)\right)d\alpha$$

d'où l'on déduit en éliminant $d\alpha$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\alpha) + \frac{z\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)}{zf'(\alpha)+F'(\alpha)}f'(\alpha)}$$

Pour que cette fonction soit independante de z, on doit avoir :
$$\frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

En ecrivant que $\frac{dz}{dy}$ est independante de α, on retrouverait la même condition, qui exprime p.e.s. la propriété en question. Cette condition s'interprete geometriquement d'une maniere remarquable ; elle exprime que la generatrice dont l'equation est :

$$x = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$
$$y = zf(\alpha) + F(\alpha)$$

Coupe la generatrice inft voisine representée par l'equation

$$x = z\varphi(\alpha) + z\varphi'(\alpha)d\alpha + \psi(\alpha) + \psi'(\alpha)d\alpha$$
$$y = zf(\alpha) + zf'(\alpha)d\alpha + F(\alpha) + F'(\alpha)d\alpha.$$

Nous n'insistons pas ici sur ce resultat et sur la maniere de l'interpreter —

Dérivées et différentielles de divers ordres.

(75) Soit $y = \varphi(x)$

une fonction quelconque de x. — la différentielle étant représentée par dy, et la dérivée par $\varphi'(x)$, on a

$$dy = \varphi'(x)\,dx.$$

La différentielle seconde de y ou d^2y, est par définition la différentielle de dy, avec cette condition que dans la différentiation on regarde dx comme une constante

on a donc $$d^2y = \varphi''(x)\,dx^2$$

d^2y est encore une fonction de x ; si on différentie d^2y en regardant dx comme constante, on aura

$$d^3y = \varphi'''(x)\,dx^3.$$

et ainsi de suite — on aurait

$$d^ny = \varphi^n(x)\,dx^n.$$

Les fonctions $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ $\varphi'''(x)$ — se nomment dérivées successives de $\varphi(x)$. Les éq. précédentes donnent l'expression d'une dérivée d'ordre quelconque en fonction de la différentielle correspondante, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx}\,, \quad \varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\,, \quad \varphi'''(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \text{ —}$$

(76) Après avoir défini la différentielle première, nous avons montré qu'en négligeant les inf^t petits du 2e ordre, on pouvait remplacer l'accroissement de la fonction par la différentielle; il existe un théorème analogue pour les différentielles d'ordre supérieur.

Si dans la fonction $\varphi(x)$ on donne à x des accroissements finis égaux entre eux et représentés par Δx, la fonction prend des valeurs successives:

$$\varphi(x) \quad \varphi(x+\Delta x) \quad \varphi(x+2\Delta x) \; — \; \varphi(x+n\Delta x).$$

que je représenterai par

$$y \quad y_1 \quad y_2 \; — \; y_n.$$

Posons conformément à une notation bien connue

$$\Delta y = y_1 - y \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1 \qquad — \; \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \qquad — \; \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y, \qquad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \qquad — \; \Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}.$$

et ainsi de suite:

Δy, $\Delta^2 y$ $\Delta^3 y$ — se nomment les différences finies des divers ordres ~~pendant la variation~~ de y. Or je dis que ces différences peuvent être remplacées quand elles deviennent inf^t petites, et qu'on fait $\Delta x = dx$ par d^2y, d^3y — absolument comme nous avons vu que Δy pouvait être remplacé par dy.

42 v

(77) Pour demontrer cette proposition très importan[te] nous ~~avons recours~~ emploierons un theoreme qu'il faut d'ab[ord] demontrer.

Théorème - si une fonction y contient une quantité arbitraire et independante de x, a, de telle sorte [que] l'on ait

$$(1)\ y = f(x, a)$$

et que pour une valeur inft petite de a, y so[it] inft petit, quelque soit x, il en sera de même [de] $\frac{dy}{dx}$.

Si l'on calcule en effet $\frac{dy}{dx}$ sans attribuer à a aucune valeur déterminée, on obtiendra une formule

$$(2)\ \frac{dy}{dx} = f'(x, a)$$

qui par cela même sera vraie pour toute valeur de [a] et il sera indifférent de donner à a une valeur déterminée dans l'equation (1), puis de la differ[entier] puis d'attribuer cette même valeur à a dans l'eq. [(2)]

Si nous appliquons cette remarque générale à l'hypothese $a = 0$, nous voyons que dans cette hypoth[èse] y devient nul, et que p.c.s. il en doit être de même [de] $\frac{dy}{dx} =$ qui par conséquent tendra vers zéro lorsque [a]

s'approchera lui même de cette limite ; c. à d. que il est infᵗ petit avec α. —

(78). Cela posé reprenons la fonction

$$y = \varphi(x)$$

nous aurons en adoptant la notation connue

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon$$

ε étant une fonction de x et de Δx qui s'annulle avec Δx. Si dans les deux membres de cette équation on change x en $x + \Delta x$ et qu'on égale leurs accroissements divisés l'un et l'autre par Δx, on aura

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}.$$

$\frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x}$ a évid. pour limite $\varphi''(x)$ lorsque Δx tend vers zéro ; $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$, tend vers zero ; car ε s'annullant avec Δx, sa dérivée est infᵗ petite quand Δx est infᵗ petit, et il en est évid. de même du rapport $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$, qui diffère infᵗ peu de cette dérivée. il résulte de là qu'on a pour une valeur infᵗ petite de Δx, et en négligeant le produit de Δx^2 par une quantité infᵗ petite

$$\Delta^2 y = \varphi''(x) \Delta x^2.$$

Si donc on pose $\Delta x = dx$ et que dx soit infᵗ petit, $\Delta^2 y$ est égal à $d^2 y$, en négligeant une quantité infᵗ petite par rapport à l'un et à l'autre.

(79). Il résulte de la démonstration précédente que Δx tendant vers zéro, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ a pour limite la second dérivée de y, $\varphi''(x)$. Posons donc

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \varphi''(x) + \varepsilon_1$$

ε_1 étant une fonction de x et de Δx qui devient nulle quelque soit x, quand Δx devient nul; si dans les deux m de cette équation on augmente x de Δx et qu'on divise p Δx leurs accroissements on aura

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\Delta\varphi''(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta x}.$$

Or $\frac{\Delta\varphi''(x)}{\Delta x}$ a cond. pour limite $\varphi'''(x)$, et l'on v comme précédemment que $\frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta x}$ a pour limite zéro, la s qu'on a en négligeant le produit de Δx^3 par une qua inf^t petite

$$\Delta^3 y = \varphi'''(x)\,\Delta x^3.$$

et par suite si l'on fait $\Delta x = dx$, et que dx soit inf^t petit, on peut regarder $\Delta^3 y$ comme égal à $d^3 y$ l'une comme étant inf^t petite par rapport à l'un et l'autre. — — on verrait de même que $\Delta^n y$ peut ê considéré comme égal à $d^n y$. —

80 On doit remarquer une différence essentielle en les différentielles du 1er ordre et les différentielles d'ordre sup lorsque plusieurs variables sont tellement liées les unes aux a que toutes dépendent de l'une d'entre elles, elles ont to

des différentielles dont le rapport ne dépendent pas du choix que l'on fait pour la variable principale. Les différentielles d'un ordre supérieur changeraient au contraire complètement si l'on changeait la variable principale. Cela tient à ce que pour obtenir les différences $\Delta^2 y$ $\Delta^3 y$ — qu'on peut remplacer à la limite par d^2y, d^3y — il faut attribuer à la variable x des accroissements successifs égaux entre eux; ce qui distingue essentiellement cette variable de toutes les autres dont les accroissements correspondants sont généralement inégaux. Lorsqu'on considère au contraire les différences premières seulement, on donne à x un seul accroissement Δx, et rien ne le distingue des accroissements correspondants des autres variables.

Soit par exemple

$$y = x^4$$
$$dy = 4x^3 dx$$
$$d^2y = 12x^2 dx^2.$$

Posons maintenant $u = x^2$ — il vient

$$y = u^2$$
$$dy = 2u\,du$$
$$d^2y = 2du^2 = 8x^2 dx.$$

Nous voyons que quand nous changeons de variable, le d^2y n'a plus la même valeur. Si nous voulons retrouver

la 1re d^2y, il faut differentier $dy = 2u\,du$, en regardant u et du comme fonction de x.

Ce qui donne $$dy = 2u\,du$$
$$d^2y = 2du^2 + 2u\,d^2u$$
ou $$d^2y = 8x^2dx^2 + 4x^2dx^2$$

Ce qui nous ramene a la premiere valeur. —

Quand on a une fonction implicite de x
$$\varphi(x,y) = 0$$
on obtient la derivée et la differentielle d'ordre superieur sans resoudre l'equation. on a
$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0$$

Differentiant une seconde fois il vient:
$$dx\left\{\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx + \frac{d^2\varphi}{dy\,dx}dy\right\} + dy\left\{\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}dx + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy\right\} + \frac{d\varphi}{dy}d^2y.$$

On calculerait de meme d^3y — —

(81) Pour trouver les derivées successives d'une fonction il suffit d'appliquer un nombre de fois convenable la methode comme qui fournissent les derivées du 1er ordre. Malheureusement les formules se compliquent de plus en plus, et il est frequemment indispensable d'avoir recours à des artifices particuliers

pour obtenir effectivement la dérivée d'un ordre élevé. Nous donnerons plus loin des exemples de ces artifices, mais ici nous nous bornerons à faire connaître une formule très souvent utile relative à la dérivée d'un produit. On a

$$\frac{d^nPQ}{dx^n} = Q\frac{d^nP}{dx^n} + n\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^2Q}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}P}{dx^{n-2}} + \text{—}$$

$$+ \text{—} \qquad\qquad + P\frac{d^nQ}{dx^n}.$$

Cette formule se vérifie aisément quand n est égal à un des premiers nombres 1, 2, 3 — ; il suffit donc de faire voir que si elle est vraie pour une valeur de n, elle l'est encore pour la valeur supérieure d'une unité. Admettons donc l'équation précédente comme exacte ; prenons les dérivées des deux membres par rapport à x ; il viendra :

$$\frac{d^{n+1}PQ}{dx^{n+1}} = \left(Q\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}} + \frac{dQ}{dx}\cdot\frac{d^nP}{dx^n}\right) +$$

$$n\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{d^nP}{dx^n} + \frac{d^2Q}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}\right) + \text{—}$$

et en remarquant que la somme de deux coefficients consécutifs est un coefficient de la puissance immédiatement supérieure, on voit que la formule est vraie d'une manière tout à fait générale. —

Cette formule est due à Leibnitz. —

45 v

Fonction de plusieurs variables indépendantes

(82). Lorsqu'une fonction contient plusieurs variables indépendantes on peut chercher sa dérivée par rapport à l'une quelconque d'elles. La notation au moyen de laquelle on représente ces dérivées est la même que dans le cas d'une seule variable indépendante.

Si l'on a $u = \varphi(x, y, z)$

les dérivées de u par rapport à x, y, z se désignent par

$$\frac{du}{dx} \quad \frac{du}{dy} \quad \frac{du}{dz}$$

Si l'on veut prendre les dérivées du second, du troisième ordre par rapport à l'une des variables, on les désignera de conformément aux notations par

$$\frac{d^2u}{dx^2} \quad \frac{d^2u}{dy^2} \quad \frac{d^2u}{dz^2}$$

Mais il peut arriver qu'on ait à prendre la dérivée de u par rapport à x, puis la dérivée du résultat par rapport à y; ou, plus généralement, qu'on ait à prendre un certain nombre m de fois la dérivée par rapport à une variable x, puis un autre nombre n de fois par rapport à une autre variable y; on désigne alors le résultat par

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}.$$

De même si l'on devait prendre la dérivée, m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, p fois par rapport à z, en désignant le résultat par

$$\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}.$$

(83). Nous allons démontrer un théorème important relatif à la dérivée prise successivement par rapport à des variables différentes : l'ordre des opérations n'influe pas sur le résultat.

Pour commencer par le cas le plus simple, auquel se ramènent tous les autres, supposons que l'on prenne la dérivée d'une fonction u par rapport à x, puis par rapport à y ; je vais prouver qu'il reviendrait au même de prendre la dérivée par rapport à y, puis la dérivée du résultat par rapport à x – je vais prouver en un mot que

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

Soit $$u = \varphi(x,y).$$

On a $$\frac{du}{dx} = \lim.\ \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x} + \varepsilon.$$

ε étant infiniment petit en même temps que Δx. Si l'on donne à y un accroissement Δy et qu'on divise par Δy les accroissements correspondants des deux membres, on

(1) $$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x,y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta y}$$

de même en posant

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta y} + \varepsilon_1$$

on trouverait

(2) $$\frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta x}$$

or $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$ $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta y}$ ont pour limite zéro; d'ailleurs les 1ers ~~membres~~ termes des seconds membres dans les équations (1) sont identiquement les mêmes; donc les seconds membres de ces équations et par suite les premiers ont la même limite.

On a donc

$$\lim. \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \lim. \frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x}$$

C'est à dire $$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

(84). Sachant que deux différentiations consécutives par rapport à des variables différentes peuvent être interverties, il est clair que si l'on a à effectuer successivement un nombre qcq de différentiations, l'ordre dans lequel les

opération seront exécutées est indifférent. La démonstration est identiquement la même que celle que l'on emploie en arithmétique pour prouver que l'ordre de deux facteurs consécutifs pouvant être changé dans un produit, on peut par cela seul disposer tous les facteurs dans un ordre arbitraire. —

Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables.

Soit $u = \varphi(x, y)$.

une fonction de deux variables indépendantes. Si l'on donne à chaque variable un accroissement infᵗ petit, il en résultera pour la fonction u un accroissement infᵗ petit qu'on peut remplacer par tout autre infᵗ petit ayant avec lui un rapport dont la limite est l'unité. On sait qu'on ~~peut~~ remplacer ainsi l'accroissement de la fonction par la différentielle, ~~$du = \frac{du}{dx}$~~

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

d^2u est la différentielle de du, dx et dy étant regardés comme constants. On a ainsi

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2$$

La différentielle troisième de u ou d^3u est par définition la différentielle de d^2u, dx et dy étant

47 r

regardé comme constant on aura

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 \ldots$$

en continuant on aurait

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{d^nu}{dx^{n-p}dy^p}dx^{n-p}dy^p + \ldots \frac{d^nu}{dy^n}$$

qu'on écrit symboliquement

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^n$$

dans le second membre de laquelle il faut remplacer les puissances de du par des différentielles d'indice égal à leur exposant.

Cette formule a été demontrée pour les valeurs $n = 1, 2, 3 \ldots$ pour prouver qu'elle est générale, je ferai voir que si l'on admet l'égalité symbolique

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^n$$

on aura avec la même convention

$$d^{n+1}u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^{n+1}.$$

Pour le demontrer, remarquons que d^nu étant une fonction de x et y, sa différentielle est donnée par la

formule

$$d^{n+1}u = \frac{d.d^n u}{dx}dx + \frac{d.d^n u}{dy}dy$$

il faut donc prendre la derivée par rapport à x de l'expression

$$\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^n,$$

multiplier cette derivée par dx; puis prendre la derivée de la même expression par rapport à y, et la multiplier par dy. Or en multipliant la même expression par

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

pour former

$$\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^{n+1}$$

on aura precisement le meme calcul à faire, et le resultat s'ecrira absolument de la même manière, en prenant en effet la derivée d'un terme quelconque par rapport à x

$$A\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}dx^p dy^q$$

et multipliant cette derivée par dx, on trouve:

$$A\frac{d^{p+q+1}u}{dx^{p+1}dy^q}dx^{p+1}dy^q$$

ce qui est précisement identique pour l'écriture au terme qu'on aurait obtenu en multipliant $A\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}dx^p dy^q$ par $\frac{du}{dx}dx$ — On verra de même qu'en prenant la derivée

par rapport à y. et multipliant par dy, les termes obtenus s'écrivent de la même manière que ceux que l'on obtiendrait en multipliant l'expression par $\frac{du}{dy}dy$. ; donc que l'équation qui donne la différentielle totale 2de de $d^{n+1}u$ conduit exactement à écrire les mêmes termes que la multiplication par

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

et si l'on admet que $d^n u$ s'écrira

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^n$$

il faudra en conclure que

$$d^{n+1}u \text{ s'écrira } \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^{n+1}$$

(86). La même règle s'applique aux différentielles totales d'une fonction d'un nombre quelconque de variables. Si l'on a

$$u = \varphi(x, y, z, t)$$

on trouvera absolument de la même manière

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt\right)^n.$$

les puissances étant entendues symboliquement.

(87) Si l'on a une fonction de plusieurs variables qui soient elles-mêmes des fonctions connues de variables indépendantes, les formules précédentes ne

s'appliquent pas.

Soit par ex :

$$u = \varphi(p, q)$$

p et q désignant des fonctions connues des deux variables indépendantes x et y. on aura toujours

$$du = \frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq.$$

Car quand il s'agit de différentielles premières, peu importe le choix des variables indépendantes, et rien ne les distinguant essentiellement des autres, on peut supposer ici que p et q remplacent x et y ; mais si l'on veut calculer d^2u, il ne faut pas oublier que cette différentielle correspond à deux accroissements égaux entre eux, donnés successivement à x et à y, auxquels correspondent en général des accroissements inégaux pour p et q. Lors donc qu'on voudra calculer d^2u, il ne sera plus permis de traiter dp et dq comme des constantes ; mais bien comme des fonctions de x et de y qui ont elles mêmes des différentielles, d^2p, d^2q, on est alors conduit à des formules compliquées. — on aura par exemple, dans le cas précédent

$$d^2u = \frac{d^2\varphi}{dp^2}dp^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dp\,dq}dp\,dq + \frac{d^2\varphi}{dq^2}dq^2 + \frac{d\varphi}{dp}d^2p + \frac{d\varphi}{dq}d^2q.$$

---

(88). Les considérations précédentes permettent de calculer les dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites de plusieurs variables.

Soient par exemple

(1) $\varphi(x, y, u, v) = 0$

(2) $\psi(x, y, u, v) = 0$

et proposons nous de calculer $\frac{d^2u}{dx^2}$ $\frac{d^2u}{dy^2}$ $\frac{d^2u}{dxdy}$ $\frac{d^2v}{dx^2}$ —

On a d'abord

(3) $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx} = 0$

(4) $\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dv}\frac{dv}{dx} = 0$

on a pris la dérivée par rapport à x, en regardant y comme constante. Ces deux équations donnent $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$

Si l'on veut avoir $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$, on prendra les dérivées par rapport à x des deux équations précédentes, ce qui donnera encore deux équations au moyen desquelles on pourra déterminer $\frac{d^2u}{dx^2}$ $\frac{d^2v}{dx^2}$ —

Pour avoir $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2v}{dxdy}$, on prendra les dérivées des équations (3) et (4); on aura ainsi deux équations au moyen desquelles on pourra déterminer les quantités que l'on cherche.

On voit facilement comment on calculerait $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2v}{dy^2}$, on commencerait par chercher $\frac{du}{dy}$ $\frac{dv}{dy}$, en prenant les dérivées par rapport à y des équations (1) et (2) —

On peut arriver au même resultat en suivant une autre methode plus élegante; nous prendrons pour inconnues d^2u, d^2v; d^2u, d^2v étant les differentielles totales de u et v, x et y étant deux variables independantes; quand nous aurons obtenu d^2u d^2v sous la forme

$$d^2u = Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$$
$$d^2v = P'dx^2 + Q'dxdy + R'dy^2$$

Nous en conclurons $\frac{d^2u}{dx^2} = P$ $\frac{d^2u}{dy^2}$ R ——

Differentions dans les equations données, en faisant varier à la fois x et y, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv = 0$$
$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv = 0$$

De ces deux equations nous ferons connaitre du et dv. — Differentions ~~encore~~ une seconde fois, il viendra

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\varphi}{du^2}du^2 + \frac{d^2\varphi}{dv^2}dv^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}dxdy + \frac{2d^2\varphi}{dxdu}dxdu$$
$$+ 2\frac{d^2\varphi}{dxdv}dxdv + 2\frac{d^2\varphi}{dydu}dydu + 2\frac{d^2\varphi}{dydv}dydv + 2\frac{d^2\varphi}{dudv}dudv +$$
$$+ \frac{d\varphi}{dv}d^2v + \frac{d\varphi}{du}d^2u \quad = 0.$$

l'equation en ψ nous fournira une autre équation

analogue à la précédente — après avoir dans ces deux equation remplacé du et dv par leur valeurs, il nous s[uffit] de calculer la valeur de d^2u, et d^2v, jusqu'à nous aurons deux equation à deux inconnues. — Comme la valeur de d^2u et d^2v seront sous la forme que nous avons indiqué tout à l'heure, nous déduirons facilement les derivées que nous voulons avoir. —

Voici un autre exemple de la meme quest[ion]

Soient les deux equation

$$z = \varphi(x, \alpha)$$

$$y = \psi(x, \alpha)$$

on propose d'en deduire $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^2z}{dy^2}$ $\frac{d^2z}{dxdy}$.

Nous allons calculer d^2z, en supposant dx, [dy] constantes. —; on a ainsi

$$dz = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{d\alpha}d\alpha$$

$$dy = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{d\alpha}d\alpha.$$

$$d^2z = \frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dxd\alpha}dxd\alpha + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}d\alpha^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha}d[^2\alpha]$$

$$0 = \frac{d\psi}{dx}dx^2 + 2\frac{d^2\psi}{dxd\alpha}dxd\alpha + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2}d\alpha^2 + \frac{d\psi}{d\alpha}d^2\alpha$$

en eliminant $d\alpha$ et $d^2\alpha$ entre les 3 dernieres, on au[ra] d^2z sous la forme $Adx^2 + Bdy^2 + Cdxdy$; d'où l'on deduir[a] les derivées que l'on cherche. —

Changement de Variables

Quand on s'occupe des différentielles du 1er ordre, il n'y a ~~pas~~ de variable indépendante. toutes les quantités qui entrent dans le calcul peuvent être prises à tel moment qu'on veut pour variable indépendante

Mais quand on passe au second ordre le choix de la variable indépendante est important.

Soit par exemple $y = x^4$

on a $dy = 4x^3dx$

$d^2y = 12x^2dx^2$

Posons maintenant $u = x^2$. il vient

$y = u^2$

$dy = 2udu$

$d^2y = 2du^2 = 8x^2dx^2$

Nous voyons que d^2y n'a pas la même valeur, selon que nous prenons pour variable indépendante x ou u.

La raison de ce fait est bien simple, si l'on prend x pour variable indépendante, dx est supposé constant. si l'on prend une nouvelle variable, c'est cette variable nouvelle dont la différentielle est constante, et dx

variable ce qui change nécessairement la différentielle du produit $\varphi'(x)dx$; ainsi dans l'exemple précédent quand on pose

$$x^2 = u$$

et que l'on prend u pour variable indépendante on a

$$x = \sqrt{u}$$

$$dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

si donc du est constant, dx devient variable et l'on a

$$d.dx = d^2x = \frac{du}{2}\left(d.\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = \frac{du}{2}\times\left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}du\right)$$

$$= -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}du^2$$

si l'on reprend d'après cela l'expression

$$dy = 4x^3dx$$

et qu'on la différentie dans cette nouvelle hypothèse de du constant et de dx variable, on trouvera

$$d^2y = 12x^2dx^2 + 4x^3d^2x$$

$$d^2y = 12x^2dx^2 - \frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}du^2 . 4x^3$$ et remplaçant $u^{-\frac{3}{2}}$ p[ar]

et du^2 par $4x^2dx^2$, $$d^2y = 12x^2dx^2 - 4x^2dx^2 = 8x^2dx^2$$

résultat qui s'accorde avec celui trouvé plus haut.

(91). Lorsqu'on considère une fonction y d'une variable et que cette variable a été considérée comme variable indép[endante] les différentielles dy d^2y d^3y … d^ny ont été définies. Supposons qu'on veuille actuellement remplacer la variab[le] indépendante x par une nouvelle variable t, liée à [x] d'une manière connue, quelle sont la relation qui

existent entre les differentielles $dy\ d^2y$ — d^ny et les differentielles nouvelles de y dans la seconde hypothèse ; afin de les distinguer nous désignerons les premières par $d_x y\ d_x^2 y$ — et nous conserverons pour les secondes la lettre d privée d'indice, en sorte que d^ny sera la differentielle de y en prenant t pour variable indépendante.

La derivée de y par rapport à x est comme on l'a vu représenté par $\frac{dy}{dx}$, quelle que soit la variable indépendante ; soit t cette variable ; cherchons la seconde derivée de y par rapport à x, c'est à dire

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

en admettant que t soit variable indépendante — il faut pour cela differentier la fonction $\frac{dy}{dx}$ et diviser la différentielle par dx. ce qui donne

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

De même la 3e derivée sera la différentielle de la seconde derivée divisée par dx. —

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_x = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d\,\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}}{dx}$$

$$= \frac{(d^2x\,d^2y + dx\,d^3y - d^2y\,d^2x - dy\,d^3x)\,dx^3 - 3\,dx^2d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^7}$$

$$= \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

52 v°

et par suite

$$d^3y = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^3}$$

et on continuerait de la même manière.

(91) Ces formules permettent de prendre telle variable indépendante que l'on voudra, ou même, ce qui est souvent plus avantageux, de laisser la variable indépendante indéterminée.

Nous ferons à ce sujet une remarque qui souvent peut être utile :, le changement de variable permet de vérifier les résultats d'un calcul.

Supposons que sans avoir pris de variable indépendante on ait trouvé la formule

$$a = F(x, y, dx, d^2x \ldots dy\ d^2y \ldots).$$

La variable indépendante étant restée indéterminée, on conserve le droit de la prendre ultérieurement comme on voudra ; et par suite si l'on fait $d^2x = 0$ dans la formule trouvée ou la formule trouvée, on aura l'expression à laquelle on serait directement parvenu si x avait été pris pour variable indépendante. Changeant ensuite dans la formule la variable indépendante x pour une variable indépendante arbitraire t, on devra retrouver la formule primitive et si cela n'est pas, c'est la preuve d'une erreur dans les calculs.

Supposons par exemple que

$$y = \varphi(x)$$

étant l'équation d'une courbe, on ait trouvé, en

resolvant un probleme relatif à cette courbe

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y + dy\,d^2x}{dx^3 + dy^3}$$

aucune variable independante n'ayant été choisie; en faisant $d^2x = 0$ on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y}{dx^3 + dy^3}$$

mais en repassant au cas général on doit remplacer $dx\,d^2y$ par $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, et par suite on a

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3 + dy^3}$$

Ce résultat ne s'accordant pas avec la formule primitive, celle-ci est impossible et l'on peut affirmer sans connaitre le probleme qu'il y a une erreur dans les calculs.—

Lorsqu'après avoir, dans une formule, supposé la variable independante arbitraire, on vient à la fixer ultérieurement, si cette variable est une des lettres qui figurent dans les calculs, on fera ses differentielles d'ordre supérieur au 1er, toutes égales à zero.; mais si la variable indep. est une fonction qui ne figure pas dans les calculs explicitement, on devra proceder autrement.

On calculera la différentielle seconde de cette fonction, et en l'égalant à zero, on aura une relation entre les diverses différentielles qui figurent dans l'expression considérée et à l'aide de cette relation on pourra modifier cette expression et lui faire prendre un grand nombre de formes diverses.

Soit par exemple l'expression

$$(1)\qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - dy\,d^2x}$$

et prenons pour variable indépendante une fonction S de x et de y définie par l'équation

$$(2)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

On aura en écrivant que $d^2s=0$

$$(3)\qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$$

et au moyen de cette relation on peut modifier de bien des manières l'expression de R — On a

$$\frac{1}{R} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dx}{ds}\left\{\frac{-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}\right\} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

on peut conserver cette expression — mais on en obtient une plus élégante en élevant $\frac{1}{R}$ au carré; on aura

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - 2\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}$$

mais en vertu de (3) —

$$-2\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = 2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Donc

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2}\right)\left\{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right\} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

expression beaucoup plus simple.

On peut remarquer que le problème qui consiste à exprimer R en fonction des dérivées de x et de y par rapport à S est indéterminé. Car il existe entre les dérivées des relations qui permettent à une infinité d'expressions de ce genre d'être équivalentes sans être identiques —

(93). On a quelquefois occasion de changer à la fois toutes les variables d'une fonction et de les remplacer par d'autres qui aient avec elles une liaison connue. C'est ce qui arrive par exemple lorsqu'on change de coordonnées pour substituer des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes. Soient u et v les variables nouvelles qu'on veut substituer à x et y dont elles sont fonctions. On aura

$$dx = \frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv$$
$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv.$$

en différentiant

$$d^2x = \frac{d^2x}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2x}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2x}{dv^2}dv^2 + \frac{dx}{du}d^2u + \frac{dx}{dv}d^2v$$
$$d^2y = \frac{d^2y}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2y}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2y}{dv^2}dv^2 + \frac{dy}{du}d^2u + \frac{dy}{dv}d^2v.$$

et ainsi de suite

Les valeurs de $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ $\frac{dx}{dv}$ $\frac{dy}{dv}$ — etc. s'obtiendront d'après les relations données entre x y u et v. Leur recherche appartient à la théorie des dérivées des fonctions implicites.

Ayant ainsi les différentielles de x et de y, on peut transformer une formule quelconque —

Soit par exemple $R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$

Cherchons l'expression de R en coordonnées polaires. On a :

$$x = \rho \cos\omega$$
$$y = \rho \sin\omega$$

$$dx = d\rho.\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega$$
$$dy = d\rho.\sin\omega + \rho\cos\omega\,d\omega$$
$$d^2x = d^2\rho\cos\omega - 2\,d\rho\sin\omega\,d\omega - \rho\cos\omega\,d\omega^2$$
$$d^2y = d^2\rho\sin\omega + 2\,d\rho\cos\omega\,d\omega - \rho\sin\omega\,d\omega^2$$

et en substituant on a :

$$R = \frac{(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3 + 2\,d\rho^2 d\omega - \rho\,d^2\rho\,d\omega}$$

Changement de variables dans les fonctions de plusieurs variables.

Considérons d'abord une fonction z de deux variables indépendantes x et y — soit

$$z = \varphi(x,y)$$

Les dérivées partielles de z par rapport à ces variables [ont] été définies, et l'on sait que la notation

$$\frac{d^{r+q}z}{dx^r\,dy^q}$$

indique le résultat obtenu en prenant successivement la dérivée de z r fois par rapport à x ; et q fois p[ar rapport à y]

rapport à y. Si maintenant on vient à changer les deux variables x et y en deux autres u et v qui leur soient liées par des formules données, on peut avoir besoin d'exprimer, dans ce nouveau système, les dérivées partielles de z qui avaient été prises dans le premier.

Occupons nous d'abord des dérivées du 1er ordre. Supposons que l'expression $z = \varphi(x,y)$ soit considérée comme fonction de u et v. On aura

$$(1) \quad \frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}.$$

$$(2) \quad \frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dv}.$$

On aurait de même

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

$$(4) \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}.$$

Le second système pouvant se déduire du 1er par un calcul que nous ne développerons pas.

(96). — Pour calculer les dérivées du second ordre(x), il faut différentier chacune des équations (1) et (2) par rapport à u et par rapport à v, ce qui donnera trois formules distinctes seulement, car les valeurs trouvées pour $\frac{d^2z}{du\,dv}$ et $\frac{d^2z}{dv\,du}$ seront identiques. On trouve en différentiant la 1re équation par rapport à u :

(x) $\frac{d^2z}{du^2}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{du\,dv}$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{d^2x}{du^2}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dx}{du}\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{dy}{du}\frac{d}{du}\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

55 v

Pour obtenir $\frac{d}{du}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\frac{d}{du}\left(\frac{dz}{dy}\right)$ qui figurent dans le 2e membre, remarquons que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant exprimé en x et y, et x et y dépendant de u, sont des fonctions composées par rapport à u, on a donc

$$\frac{d}{du}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{du} + \frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d}{du}\cdot\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dxdy}\frac{dx}{du} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{du}.$$

et par suite on a :

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{d^2x}{du^2}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2y}{du^2}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

On trouve de même

$$\frac{d^2z}{dv^2} = -$$

$$\frac{d^2z}{dudv} = -$$

et les trois équations feront connaître $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$.

On pourrait suivre une marche inverse en prenant pour point de départ les formules

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}.$$

et différentiant par rapport à x et à y.

On trouve :

(1)
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{du}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{dz}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dv}\right) + \frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dx^2}$$
$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2u}{dxdy}\frac{dz}{du} + \frac{du}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{d^2v}{dxdy}\cdot\frac{dz}{dv} + \frac{dv}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dv}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{dz}{du}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{dv}{dy}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dv}\right) + \frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{du}\right) = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du}{dx} + \frac{d^2z}{dudv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$
$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{du}\right) = \frac{d^2z}{du^2}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{dudv}\cdot\frac{dv}{dy}.$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dv}\right) = \frac{d^2z}{dv^2}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^2z}{dvdu}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dv}\right) = \frac{d^2z}{dv^2}\cdot\frac{dv}{dy} + \frac{d^2z}{dudv}\cdot\frac{du}{dy}$$

et par la substitution de ces valeurs, les formules (1) donnent les dérivées de z par rapport à x et à y, exprimées par ~~rapport~~ les dérivées de la même fonction par rapport à u et à v, et les dérivées des fonctions u et v par rapport à x et à y.

(97). On peut procéder d'une autre manière et calculer à la fois toutes les dérivées du même ordre en formant la différentielle totale de la fonction.

En considérant z comme une fonction de u et v on a

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv.$$

et l'on sait que

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

$$dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy.$$

On a ensuite :

$$d^2z = d\left(\frac{dz}{du}\right)du + \frac{dz}{du}d^2u + d\left(\frac{dz}{dv}\right)dv + \frac{dz}{dv}d^2v.$$

et comme

$$d\frac{dz}{du} = \frac{d^2z}{du^2}du + \frac{d^2z}{du\,dv}dv$$

$$d\frac{dz}{dv} = \frac{d^2z}{du\,dv}du + \frac{d^2z}{dv^2}dv$$

on a

$$d^2z = \frac{d^2z}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2z}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2z}{dv^2}dv^2 + \frac{dz}{du}d^2u + \frac{dz}{dv}d^2v.$$

En remplaçant dans cette formule du, dv, d^2u, d^2v par leurs valeurs

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

$$dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2v}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2v}{dy^2}dy^2$$

d^2z prendra la forme

$$d^2z = P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2.$$

et l'on aura

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = Q \quad \frac{d^2z}{dy^2} = R.$$

Application — transformer la somme

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

quand on substitue aux trois coordonnées x, y, z, trois coord. nouvelles $x'y'z'$ liées à x, y, z par les équations

$$x' = ax + by + cz$$
$$y' = a'x + b'y + c'z$$
$$z' = a''z + b''y + c''z.$$

a, b, c a' b' c' a'' b'' c'' satisfaisant, comme on sait aux six équations

$$a^2+b^2+c^2=1 \qquad a'^2+b'^2+c'^2=1 \qquad a''^2+b''^2+c''^2=1$$
$$aa'+bb'+cc'=0 \qquad aa''+bb''+cc''=0 \qquad a'a''+b'b''+c'c''=0$$

On remarquera que la relation qui lient x, y, z à x' y' z' étant du 1er degré, si dx dy dz sont constants il en sera de même de dx' dy' dz'.

On aura donc

$$d^2V = \frac{d^2V}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2V}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2V}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2V}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2V}{dydz}dydz$$

$$d^2V = \frac{d^2V}{dx'^2}dx'^2 + \frac{d^2V}{dy'^2}dy'^2 + \frac{d^2V}{dz'^2}dz'^2 + 2\frac{d^2V}{dx'dy'}dx'dy' + 2\frac{d^2V}{dx'dz'}dx'dz' + 2\frac{d^2V}{dy'dz'}dy'dz'$$

Mais on a

$$dx' = adx + bdy + cdz$$
$$dy' = a'dx + b'dy + c'dz$$
$$dz' = a''dx + b''dy + c''dz$$

en substituant dans le 2e membre de l'equation precedente puis identifiant les coefficients des termes semblables, qui doivent être egaux, puisque dx et dy sont arbitraires, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = a^2\frac{d^2V}{dx'^2} + a'^2\frac{d^2V}{dy'^2} + a''^2\frac{d^2V}{dz'^2} + 2aa'\frac{d^2V}{dx'dy'} + 2aa''\frac{d^2V}{dx'dz'} + 2a'a''\frac{d^2V}{dy'dz'}$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = b^2\frac{d^2V}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2V}{dy'^2} + b''^2\frac{d^2V}{dz'^2} + 2bb'\frac{d^2V}{dx'dy'} + 2bb''\frac{d^2V}{dx'dz'} + 2b'b''\frac{d^2V}{dy'dz'}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = c^2\frac{d^2V}{dx'^2} + c'^2\frac{d^2V}{dy'^2} + c''^2\frac{d^2V}{dz'^2} + 2cc'\frac{d^2V}{dx'dy'} + 2cc''\frac{d^2V}{dx'dz'} + 2c'c''\frac{d^2V}{dy'dz'}$$

et par consequent

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2} + \frac{d^2V}{dz'^2}.$$

Autre application du changement de variables. —

z etant une fonction de x et y, on a :

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

On substitue à x et y des variables nouvelles α et β definies par la relation

$$\alpha = ax + by$$
$$\beta = a'x + b'y$$

Determiner a et b que l'equation se reduise a

$$\frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} = 0$$

Nous calculerons à cet effet les derivées $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^2z}{dxdy}$ $\frac{d^2z}{dy^2}$ en fonction des derivées de z par rapport à α et β.

On a $$dz = \frac{dz}{d\alpha}d\alpha + \frac{dz}{d\beta}d\beta$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{d\alpha^2}d\alpha^2 + 2\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}d\alpha d\beta + \frac{d^2z}{d\beta^2}d\beta^2 + \frac{dz}{d\alpha}d^2\alpha + \frac{dz}{d\beta}d^2\beta.$$

Nous remplacerons maintenant $d\alpha$ $d\beta$ $d^2\alpha$ $d^2\beta$ par leur valeur.

$$d\alpha = a\,dx + b\,dy$$

$$d\beta = a'dx + b'dy$$

$$d^2\alpha = 0$$

$$d^2\beta = 0.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation qui donne d^2z on aura pour d^2z une valeur de la forme

$$d^2z = P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2.$$

D'où l'on déduira

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = R$$

Portant ces valeurs dans l'équation donnée, nous aurons une nouvelle équation qui contiendra $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2z}{d\beta^2}$, $\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}$. En égalant à zéro les coefficients de $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ et $\frac{d^2z}{d\beta^2}$, nous aurons deux relations pour déterminer a b a' b'.

Formule de Taylor.

Démonstration de la formule de Taylor — (Voyez le Cours de Sturm). —

La formule de Taylor est la suivante

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h).$$

Si l'on fait dans cette équation $a=0$ on obtient

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}.f^n(\theta h).$$

qui constitue le théorème de MacLaurin. —

Si la fonction f est telle que pour des valeurs croissantes de n le dernier terme

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h)$$

tende sans cesse vers zéro, le théorème de Taylor fournit une série illimitée dont la limite représente $f(a+h)$. Or il est important de remarquer que cette circonstance se présentera très souvent, et on peut le dire, dans le plus grand nombre de cas.

Quel que soit h en effet, le facteur $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ tend vers zéro lorsque n augmente; si on l'écrit en effet de la manière suivante

$$\frac{h}{1}.\frac{h}{2}.\frac{h}{3}\ldots\frac{h}{n}$$

les facteurs de ce produit vont sans cesse en diminuant

à mesure que leur nombre augmente, en sorte que leur produit tend aussi vers zéro. Si donc la fonction $f^n(x)$ n'est pas susceptible de devenir infinie, le dernier terme du développement de $f(a+h)$ tend vers zéro et par suite $f(a+h)$ est la limite de la somme de tous les ~~termes~~ autres. —

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(a) + \cdots$$

Le théorème de Taylor fait connaître une série ordonnée suivant les puissances de h qui représente $f(a+h)$, mais sous la condition nécessaire que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(a+\theta h)$$

tende vers zéro quand n augmente. Il ne serait pas exact de dire que la série représente $f(a+h)$ quand elle est convergente; car cette condition, nécessaire bien entendu, n'est pas toujours suffisante — il faut aussi que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(a+\theta h)$$

ait une limite finie C et alors la somme de tous les autres converge vers

$$F(a+h) - C.$$

Dans la série de Taylor, si l'on suppose h infiniment petit, les termes de cette série sont des infiniment petits d'un ordre de plus en plus élevé; et en s'arrêtant à un ~~certain ordre~~ terme d'un certain ordre, le reste de la série

est toujours un inf^t petit d'un ordre supérieur. Si en effet on s'arrête au terme

$$\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a)$$

le reste est

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} \cdot f^n(a+\theta h).$$

on voit que le dernier terme étant un inf^t petit d'ordre $n-1$ le reste est de l'ordre n pourvu que la n^e dérivée ne devienne pas infinie pour les valeurs de x comprises entre a et $a+h$. —

Application du théorème de Taylor au développement en série de différentes fonctions —

$$F(x) = a^x$$
$$F(x) = l.(1+x)$$
$$F(x) = (1+x)^n$$

(Voir pour tous ces développements le cours de Sturm.)

—

Exponentielles imaginaires

Reprenons les trois séries.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} +$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} -$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} -$$

61v

qui est été demontrée pour toutes les valeurs réelles de x ; si nous y remplaçons x par $x\sqrt{-1}$, nous formerons des séries nouvelles que nous pr[endrons] pour définitions des fonctions $e^{x\sqrt{-1}}$ $\sin x\sqrt{-1}$ $\cos x\sqrt{-1}$; on trouvera d'après les valeurs connues des puissances de $\sqrt{-1}$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$$

on en déduit.

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$

On trouvera de même

$$\cos x\sqrt{-1} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin x\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(x + \frac{x^3}{1.2.3} + \quad\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ces formules sont fréquemment utiles en analyse ; il ne faut pas oublier, quand on les emploie, que les séries qui ont servi à les démontrer, forment la définition des fonctions considérées lorsque la variable devient imaginaire.

(115) Les théorèmes relatifs à la multiplication des exponentielles réelles s'appliquent au cas où les exposants sont de la forme $x\sqrt{-1}$, mais il est essentiel de le démontrer.

Soient les deux exponentielles

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y. \quad - \text{ on a}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

On déduit de là en posant

$$x+y=z \qquad y=z-x$$

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}} = e^{(z-x)\sqrt{-1}}$$

les règles de multiplication et de division sont donc les mêmes que pour les puissances réelles —

Je vais donner l'application de la formule à deux développements qui sont souvent utiles dans quelques problèmes de Calcul intégral.

On a

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

en désignant par m un nombre entier, on aura :

$$2^m \cos^m x = \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)^m$$

Soit $\quad e^{x\sqrt{-1}} = u \quad e^{-x\sqrt{-1}} = v$.

On aura :

$$2^m \cos^m x = (u+v)^m = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} u^{m-2} v^2 + \cdots + v^m$$

(Voir la suite, au cours de M. Sturm.) —

quand m est impair on a :

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x + \frac{m(m-2)}{1\cdot 2} 2\cos(m-4)x + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+1}{2}-1\right)}{1\cdot 2 \cdots \frac{m-1}{2}} 2\cos x.$$

62 v

quand n est pair on a:

$$2^n \cos^n x = 2\cos nx + 2\cos(n-2)x + 2\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \cdots$$

$$+ \cdots \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\cdots\frac{n}{2}}$$

On peut d'une manière analogue développer les puissances entières de $\sin x$. —

Pour tout ce qui est relatif aux quantités imaginaires voir le Cours de M. Sturm. —

—

Quand on veut développer une fonction de x suivant les puissances croissantes de cette variable par la formule de Mac Laurin, il faut calculer les dérivées de cette fonction, ce qui offre q.q. fois quelque difficulté; alors on a recours à des artifices particuliers. —

Soit par exemple $\operatorname{arctg} x$ qu'on veut développer suivant les puissances croissantes de x. —

On a $\frac{d.\operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ — on a:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Si nous calculons les dérivées de $\frac{1}{1+x^2}$, il est clair que nous aurons par là même les dérivées de $\operatorname{arctg} x$; car la n^e dérivée de $\frac{1}{1+x^2}$ sera la $(n+1)^e$ dérivée de $\operatorname{arctg} x$. — On fera $x=0$ dans ces dérivées, et on aura facilement ainsi les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$. —

Extension du Théorème de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

— Voir le Cours de Sturm. —

Remarque : supposons une fonction de deux variables développée par le théorème de Taylor — si h et k sont infint petits, les termes du développement sont des infint petits dont l'ordre va toujours en croissant. Donc quand on s'arrête à un terme, l'erreur commise est infint petite par rapport à ce terme. —

La série de Taylor peut prendre une autre forme. — on a :

$$\varphi(x+dx) = \varphi(x) + \varphi'(x)dx + \frac{\varphi''(x)dx^2}{1.2} + \frac{\varphi'''(x)dx^3}{1.2.3} + \text{—}$$

ce qu'on peut évidemment écrire de la manière suivante :

$$\Delta\varphi = d\varphi(x) + \frac{1}{2}d^2\varphi(x) + \frac{1}{6}d^3\varphi(x) + \text{—}$$

$\Delta\varphi(x)$ étant l'accroissement rigoureux de la fonction $\varphi(x)$.

Ceci s'applique à une fonction de plusieurs variables

on aurait encore

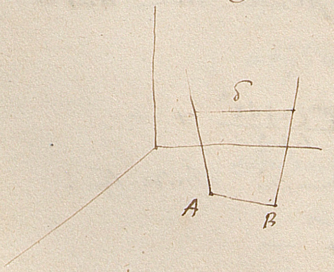
$$\varphi(x+dx, y+dy) = \varphi(x,y) + \left(\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy\right) + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2\varphi}{dxdy}dxdy + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2\right\}^2 + \text{—}$$

Donc l'on déduit

$$\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{6}d^3\varphi + \text{—}$$

Je vais donner une application de cette formule ; ~~[illegible]~~ Quand deux droites se succèdent dans l'espace suivant une loi quelconque, la distance de deux droites infiniment voisines est de même que l'accroissement du paramètre pour passer de l'une des droites à la droite suivante. Si cette condition n'est pas remplie, la plus courte distance de deux droites est toujours du 3e ordre ; elle n'est pas du second ordre —

Je cherche d'abord la formule qui donne la plus courte distance de deux droites.



Soient

$$x = az + p \qquad x = a'z + p'$$
$$y = bz + q \qquad y = b'z + q'$$

les équations des deux droites ; soit δ leur plus courte distance —

$$\delta = AB \cos(\delta, AB).$$

$$AB = \sqrt{(p-p')^2 + (q-q')^2}$$

Il nous faut calculer maintenant le cosinus de l'angle que font entre elles les deux droites AB et δ.

Les cosinus des angles que AB fait avec les axes des x, des y, et des z sont

$$\frac{p'-p}{AB} \quad \frac{q'-q}{AB} \quad 1.$$

Si nous désignons par α, β, γ les angles que δ forme avec les mêmes axes, les cosinus seront déterminés par les relations

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + \cos\gamma = 0$$
$$a'\cos\alpha + b'\cos\beta + \cos\gamma = 0$$

Car la droite δ est perpendiculaire aux deux droites données.

On déduit de ces équations

$$\frac{\cos\alpha}{b-b'} = \frac{\cos\beta}{a-a'} = \frac{\cos\gamma}{ab'-ba'}.$$

et par suite

$$\cos\alpha = \frac{b-b'}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a-a'}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{ab'-ba'}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

64 v

On a donc enfin

$$\delta = \frac{(p'-p)(b-b') + (q'-q)(a'-a)}{\sqrt{(b-b')^2 + (a-a')^2 + (ab'-ba')^2}}.$$

Ceci posé soit une droite

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

a, b, p, q étant fonctions d'un même paramètre en donnant un accroissement infiniment petit à ce paramètre les quantités a, b, p, q prendront des accroissements correspondants Δa Δb Δp Δq et la droite infiniment voisine aura pour équation

$$x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p$$
$$y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q.$$

et on a pour la plus courte distance δ de ces deux droites

$$\delta = \frac{-\Delta p \Delta b + \Delta q \Delta a}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}$$

Si l'accroissement attribué au paramètre est du 1^r ordre Δa et Δb sont aussi du 1^r ordre — donc le denominateur est du 1^r ordre —

voyons quel est l'ordre du numérateur — on a:

$$\Delta a = da + \frac{1}{2}d^2a + \frac{1}{6}d^3a -$$
$$\Delta q = dq + \frac{1}{2}d^2q + \frac{1}{6}d^3q +$$
$$\Delta b = db + \frac{1}{2}d^2b + \frac{1}{6}d^3b +$$
$$\Delta p = dp + \frac{1}{2}d^2p + \frac{1}{6}d^3p + -$$

Le numérateur a pour partie principale

$$da\,dq - db\,dp.$$

le terme contient dt^2, (en supposant que t soit la variable indépendante). ; si ce terme n'est pas nul, il est inutile d'écrire les autres qui sont du 3e ordre; on voit que dans le cas la distance δ est du 1^r ordre.

Mais si ce terme est nul, il faut écrire les termes qui contiennent dt^3 en facteur; — et qui sont

$$\frac{1}{2}\left(dq\,d^2a + da\,d^2q - dp\,d^2b - db\,d^2p\right)$$

mais si le premier est nul, celui-ci est nul; car il est la différentielle du premier. et alors la partie principale du numérateur est du 4e ordre

Partant la distance δ est du 3e ordre. —

66 r

Théorie des maxima et des minima.

Maxima et minima d'une fonction de ~~plus~~ une seule variable. (Voyez cours de M. Sturm).

Problème; trouver la plus courte distance d'une courbe plane à un point situé dans son plan.

Soit $y = \varphi(x)$

l'éq. de la courbe donnée et (α, β) les coord. du point donné. Le carré de la distance que nous voulons rendre maximum ou minimum est

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

y étant une fonction de x, δ^2 ne dépend que d'une seule variable, et le théorème précédent est applicable. En égalant à zero la dérivée de δ^2 on a la relation

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Condition commune au maximum et au minimum.

Cette condition exprime que le point donné (α, β) est situé sur la normale à la courbe menée par le point dont les coordonnées sont x et y. Pour distinguer le maximum du minimum je cherche la seconde dérivée de δ^2.

il vient:
$$\frac{d^2\delta^2}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}$$

La distance δ sera minimum si l'on a

$$(1) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

elle sera minima si l'on a

$$(2) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

il n'y aura ni maximum, ni minimum si l'on a

$$(3) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Pour interpréter les 3 conditions, faisons successivement occuper au point α, β toutes les positions sur une même normale à la courbe proposée, en sorte que x et y aient toujours la même valeur; il est clair que pour un certain point de cette normale l'eq. (3) sera vérifiée, et que ce point, toujours unique, sépare ceux pour lesquels la condition (1) est remplie de ceux pour lesquels on a la relation (2).

Il existe donc ~~un point~~ sur chaque normale un point dont la distance à la courbe ~~proposée~~ comptée sur cette normale n'est maximum ni minimum, et ce point sépare ceux pour lesquels la normale est la plus courte distance de ceux pour lesquels elle est la plus longue distance.

Si du point de séparation comme centre on décrit un cercle tangent à la courbe proposée, il est clair que dans le voisinage du point de contact, ce cercle sera en partie dedans, en partie au dehors de la courbe et qu'en la touchant il la traversera.

Trouver la plus courte distance d'un point donné sur l'axe des x au cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=R^2.$$

La méthode générale est ici en défaut....

—

Maxima et minima des fonctions de deux variables indépendantes. —

—

Soit $\varphi(x,y)$ une fonction donnée dans laquelle x et y représentent des variables arbitraires. Cette fonction sera maxima ~~ou minima~~ pour certaines valeurs $x=a$, $y=b$, si la différence

$$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a,b)$$

est constamment négative pour des valeurs très petites de h et K. Il y aura minimum si cette quantité est constamment positive. On a

$$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a,b)=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)h+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)k+R$$

dans $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, x et y sont remplacés par a et b. — Si $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$ ne sont pas nuls tous les deux, les deux termes $\frac{d\varphi}{dx}h$ et $\frac{d\varphi}{dy}K$, sont pour des très petites valeurs de h et K aussi grands que l'on veut par rapport à R, et donnent leur signe au 2e membre. Il est clair qu'en changeant

à la fois le signe de h et le signe de k sans changer leur valeur, les deux termes changent de signe, et que par suite le second membre n'étant ni toujours positif ni toujours négatif, il n'y aura ni maximum ni minimum. Les conditions communes de maximum et de minimum sont donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

En d'autres termes la différentielle totale

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy$$

doit être nulle — Si ces conditions sont remplies, on aura :

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)hk + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + R.$$

Si les trois dérivées $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ $\frac{d^2\varphi}{dxdy}$ $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ ne sont pas nulles ~~par~~ toutes les trois pour les valeurs $x=a$ $y=b$, le signe du second membre sera (pour des valeurs très petites de h et k) le même que celui du trinome

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{dxdy}hk + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{k^2}{2}$$

Il y aura maximum si cette expression est négative pour toutes les valeurs très petites de h et k, et minimum dans le cas contraire. Mais en lui donnant la forme

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{k}{h} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{k^2}{h^2}\right)$$

on voit que son signe ne dépend que du rapport $\frac{k}{h}$ qui peut recevoir toutes les valeurs possibles quand h et k restent très petits. D'où il résulte qu'on peut éliminer cette condition de petitesse

Lorsque l'expression ci dessus conserve toujours le même signe, il faut qu'on ait:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

Ce qui exige que $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ aient le même signe.

La somme des trois termes est constamment positive si $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ et $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ sont ~~constamment~~ positifs; elle est constamment négative s'ils sont ~~constamment~~ négatifs.

il peut arriver que

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$$

On aurait toujours

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + A_1h^3 + 3B_1h^2k + 3C_1hk^2 + D_1k^3 + R.$$

en designant par $A, B, C \ldots A_1 \ldots$ les différentes dérivées. — Si les valeurs h et k sont telles que leur rapport $\frac{k}{h}$ soit la racine de l'équation

$$A + 2B\frac{k}{h} + C\left(\frac{k}{h}\right)^2 = 0$$

l'ensemble des termes du second ordre sera nul, ce sera l'ensemble des termes du 3e qui donnera son signe. Cette somme des 4 termes suivants sera nulle pour cette valeur de $\frac{k}{h}$, ou bien elle ne le sera pas; c'est évid. ce dernier cas qui est le plus vraisemblable. Dans ce second cas il n'y a ni maximum, ni minimum; car la somme des 4 termes peut

68 v°

change de signe si l'on change h en −h et k en −k. Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faudrait que la racine en question annulât la somme des termes du 3e ordre auquel cas ce seraient les termes du 4e ordre qui donneraient le signe au polynome; il faudrait de plus que cette valeur de $\frac{k}{h}$ donnât à l'ensemble des termes du 4e ordre le ~~même~~ signe qu'appartient constamment au polynome du 2e degré

$$h^2\left(A + 2B\frac{k}{h} + C\left(\frac{k}{h}\right)^2\right).$$

Si les 3 dérivées du second ordre étaient nulles, on verrait facilement que celles du 3e ordre devraient l'être aussi et que le polynome formé par l'ensemble des termes du 4e degré dans le développement de $\varphi(x+h, y+k)$ eut un signe invariable et pour cela qu'en l'égalant à zéro, l'équation par rapport à l'inconnue $\frac{k}{h}$ eût toutes ses racines imaginaires —

L'étude des maxima et minima des fonctions d'un plus grand nombre de variables conduit à des résultats analogues. Soit la fonction $\varphi(x, y, z)$ x y z étant trois variables indépendantes

Pour que la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit maxima ou minima pour les valeurs x y z, il faut que l'on ait les trois relations

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

et que de plus le polynome

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}h^2+\frac{d^2\varphi}{dy^2}k^2+\frac{d^2\varphi}{dz^2}l^2+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}hk+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}hl+2\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}kl$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs très petites attribuées à h, k, l. On remarque, comme plus haut, que la condition de petitesse imposée à ces trois ~~termes~~ lettres est absolument insignifiante, puisque le signe du polynome ne dépend que de leurs rapports ; par suite il suffit d'exprimer que le polynome obtenu en divisant tous les termes par h^2 et qui dépend des rapports $\frac{k}{h}$, $\frac{l}{h}$, conserve le même signe quels que soient ces rapports. Représentons ce polynome par

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ekl+2Flh$$

il est facile de trouver la condition pour que ce polynome conserve toujours le même signe quel que soit $\frac{k}{h}$. — Nous allons pour cela mettre le polynome sous une autre forme en faisant considérer ces termes comme les commencements d'un carré. Ce polynome est égal à

$$A\left(h+\frac{D}{A}k+\frac{E}{A}l\right)^2+Bk^2+Cl^2+2Ekl-\frac{D^2}{A}k^2-\frac{E^2}{A}l^2-\frac{2DE}{A}kl$$

ou $$A\left(h+\frac{D}{A}k+\frac{F}{A}l\right)^2+Mk^2+Nl^2+2Pkl$$

en ~~posant~~ $M=B-\frac{D^2}{A}$ $N=C-\frac{F^2}{A}$ $P=$

De même on peut écrire

$$Mk^2+Nl^2+2Pkl = M\left(k+\frac{Pl}{M}\right)^2-\frac{P^2l^2}{M^2}+Nl^2$$

ou $M\left(k+\frac{Pl}{M}\right)^2 + Ql^2$ —

en sorte que en définitive le polynôme

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ekl+2Fhl$$

peut se mettre sous la forme

$$A\left(h+\frac{D}{A}k+\frac{F}{A}l\right)^2 + M\left(k+\frac{Pl}{M}\right)^2 + Ql^2.$$

Pour que cette somme soit toujours positive, il faut que les 3 coefficients A, M, Q soient tous positifs ; car si l'un d'eux était négatif, nous pourrions au moyen de valeurs convenables de h et k annuler les termes dont les coefficients ne sont pas négatifs, et alors la somme serait aussi négative.

Pour que cette somme soit constamment négative, il faut que les 3 coefficients soient tous les trois négatifs. —

Il faudrait d'abord prouver que A ne doit pas être nul (Voir pour cela les cours de Sturm).

Cette méthode s'appliquerait à un nombre quelconque de variables. —

Maxima et minima des fonctions implicites

[Marge : fonctions implicites d'une seule variable — (Voyez le cours de Sturm).]

Il arrive souvent que la fonction dont on veut déterminer le maximum ou le minimum soient exprimée en fonction de variables qui ne soient pas toutes indépendantes les unes des autres, et entre lesquelles une ou plusieurs relations sont données ; on conçoit alors la possibilité d'éliminer quelques unes d'entre elles et de rentrer dans le cas précédent. Mais il est toujours plus élégant et quelquefois absolument nécessaire pour rendre les calculs praticables de suivre une marche différente.

Soit à rendre maxima la fonction

$$\varphi(x, y, z)$$

x, y, z étant liés par la relation

$$F(x, y, z) = 0$$

Les dérivées de φ par rapport aux deux variables x et y indépendantes doivent être nulles, et l'on doit avoir ainsi.

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ doivent être déduits de l'éq. $F(x, y, z) = 0$

qui donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0.$$

70v

On aura ainsi deux equations entre $x\ y\ z$ qui avec l'équation $F(x,y,z)=0$ feront connaître les valeurs de $x,\ y,\ z$ qui rendent $\varphi(x,y,z)$ maximum ou minimum

Pour savoir si les valeurs de x, y, z déduites de ces équations rendent la fonction maxima ou minima on calculera les dérivées du second ordre $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ $\frac{d^2\varphi}{dxdy}$ $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ et l'on examinera ensuite si les conditions trouvées précédemment, pour le cas du maximum ou du minimum sont remplies.

Le calcul de ces dérivées du second se fait sans difficulté — leurs expressions est

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dxdy} + \frac{d^2\varphi}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dzdy}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}$$

et dans ces expressions on remplacera $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$ $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^2z}{dxdy}$ $\frac{d^2z}{dy^2}$ par les valeurs déduites de l'équation $F(x,y,z)$

En général soit une fonction φ de $m+n$ variables, liées par n equations $L=0$ $M=0$ Le nombre des variables indépendantes est m.

Je remarque que la 1re condition imposée dans le cas du maximum ou du minimum peut se

resumer ainsi : il faut que la differentielle ~~totale~~ 1ère totale de la fonction soit nulle ; on aura donc :

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \cdots = 0$$

Voila la condition commune au maximum et au minimum de la fonction φ — les quantités dx, dy, dz — ne sont pas independantes les unes des autres ; elles sont liées entre elles par les n relations

$$(A)\left\{\begin{array}{l} \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \cdots = 0 \\ \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \cdots = 0 \\ \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \cdots = 0. \\ \cdots \end{array}\right.$$

Nous déduirons de là les valeurs de n différentielles. Nous porterons ces valeurs dans la differentielle totale $d\varphi$ et nous egalerons à zero les coefficients des m differentielles qui resteront[(x)] ; nous aurons ainsi m equations ; ces m equations jointes aux n equations données, nous feront connaitre les valeurs des m+n variables qui repondent au maximum ou au minimum de la fonction φ.

(x) car ces m différentielles restant sont complètement arbitraires.

On voit qu'en définitive la méthode revient à éliminer les m+n quantités dx dy dz —. La methode la plus élegante consiste souvent à multiplier

71 v°

les n equation A par des fonction $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 - \lambda_n$

On ajoute ensuite les n equation ainsi multipliée à l

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + - \qquad = 0$$

on egalera à zero les coefficiens des differentielles à élimi

il faudra ensuite egaler à zero les coefficient des differentielles

restantes ce qui donnera autant $m+n$ equations ces équ

jointes aux n equation données permettront de determi

les variables x, y, z — et les fonction $\lambda_1\, \lambda_2$ —

On peut remarquer que le calcul serait le même si l'on cherchait directement le maximum de la somme

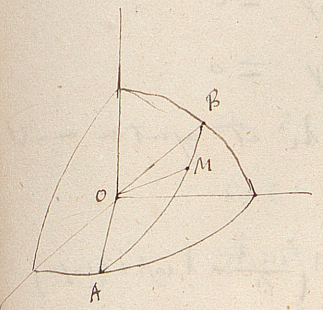
$$\varphi + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 M + - \qquad (x)$$

(x), en regardant toutes les variables x, y, z — comme indépendantes

On comprend en effet que si cette somme est maximum p certaines valeurs de x, y, z — en imposant à L, M, N — l'obligation d'être constantes, la seule partie variable de la somme devra être maxima ; $\lambda_1\, \lambda_2$ devant d'ailleurs être déterminés de telle sorte que les valeurs des variables qui rendent la somme maximum donnent précisém la valeur zero aux quantités $L\ M\ N$ ——

72 r

Nous allons appliquer la méthode précédente à la question suivante : Déterminer en grandeur et en direction les axes de la section d'un ellipsoïde par un plan diamétral donné.



Soit $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde

λ μ ν les angles formés avec les axes par la normale au plan considéré AOB —

Considérons dans la section AMBO un rayon vecteur quelconque OM que nous désignerons par r — soient α, β, γ les angles que OM fait [avec] les axes

Les trois coordonnées du point M sont

$r\cos\alpha \quad r\cos\beta \quad r\cos\gamma.$

Si l'on substitue les valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde, il vient

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)=1$$

d'où

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=\frac{1}{r^2}$$

La question revient à trouver le maximum et le minimum de r, en d'autres termes il faut rendre maximum ou minimum l'expression

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

α β γ étant liés par les deux relations

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0.$$

72 r

le suivant par exemple la methode indiquée précédemment on aura

(1) $\frac{\cos\alpha\, d\cos\alpha}{a^2} + \frac{\cos\beta\, d\cos\beta}{b^2} + \frac{\cos\gamma\, d\cos\gamma}{c^2} = 0$

(2) $\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0$

(3) $\cos\lambda\, d\cos\alpha + \cos\mu\, d\cos\beta + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0$

Multiplions (2) et (3) par λ_1 et λ_2 et ajoutons avec (1) il viendra

$$d\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{a^2} + \lambda_1\cos\alpha + \lambda_2\cos\lambda\right) + d\cos\beta\left(\frac{\cos\beta}{b^2} + \lambda_1\cos\beta + \lambda_2\cos\mu\right)$$
$$+ d\cos\gamma\left(\frac{\cos\gamma}{c^2} + \lambda_1\cos\gamma + \lambda_2\cos\nu\right) = 0.$$

et l'on doit par suite poser

$$\frac{\cos\alpha}{a^2} + \lambda_1\cos\alpha + \lambda_2\cos\lambda = 0$$
$$\frac{\cos\beta}{b^2} + \lambda_1\cos\beta + \lambda_2\cos\mu = 0$$
$$\frac{\cos\gamma}{c^2} + \lambda_1\cos\gamma + \lambda_2\cos\nu = 0$$

Ce qui avec les deux equations de condition donnera nous donne bien 5 equations pour determiner 5 inconnues, α, β, γ, λ_1 ajoutons les 3 dernières equations après les avoir multipliés par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; on aura

$$\frac{1}{r^2} + \lambda_1 = 0$$

par suite on a:

$$\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos\lambda=0$$

$$\cos\beta\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos\mu=0$$

$$\cos\gamma\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos\nu=0$$

On déduit de là en multipliant les équations par $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$, ~~et ajoutant~~ les divisant par $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}$, et ajoutant:

$$\frac{\cos^2\lambda}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}+\frac{\cos^2\mu}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}}+\frac{\cos^2\nu}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}}=0.$$

équation bicarrée qui fera connaître les deux valeurs de r, l'une répondant au maximum, l'autre répondant au minimum. —

r étant déterminé nous avons trois nombres auxquels sont proportionnelles les valeurs de $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$, car on a

$$\frac{\frac{\cos\lambda}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\cos\mu}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}}}{\cos\beta}=\frac{\frac{\cos\nu}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}}}{\cos\gamma}.$$

La question de maximum et de minimum que nous venons de traiter est comprise comme cas particulier dans la question suivante :

On a les equations :

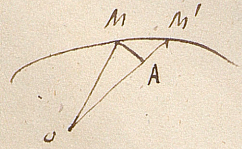
$$f(x, y, z, u, v) = 0$$
$$\varphi(x\ y\ z\ u\ v) = 0$$
$$\psi(x, y, z, u, v) = 0$$

D'après ces equations z, u et v sont fonctions des variables independantes x et y ; on propose de trouver le maximum et le minimum des fonctions z u et v

(Voir le cours de Sturm). —

Lorsqu'une fonction devient maxima ou minima la differentielle est nulle — Cette condition commune aux maximums et aux minimums conduit souvent à la ~~recherche~~ solution très simple de problemes relatifs ~~aux~~ à la théorie qui [nous] occupe.

Supposons qu'il s'agisse de trouver la plus courte distance d'un point à une courbe —



Si OA est la solution, on devra avoir en négligeant les inf^t petits du second ordre

$$OM' - OA = 0$$

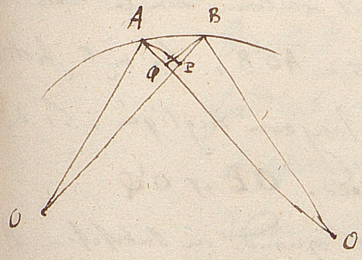
Mais en abaissant du point M une perpend. sur OM

On a aux inf^t petits près du 2e ordre

$$OM' - OM = M'A = MM' \cos MM'A$$

et il faut par conséquent que $\cos MM'A$ soit inf^t petit et par suite que la ligne OA soit normale.

Cherchons sur une courbe un point tel que la somme des distances à deux points fixes soit un maximum ou un minimum.



Si $OA + O'A$ est un maximum, on doit avoir en négligeant les inf^t petits du 2e ordre

$$OA + O'A = OB + O'B.$$

Mais en abaissant du point A et B des perpend. AP et BQ sur OB et sur $O'A$, on a en négligeant toujours les inf^t petits du second ordre

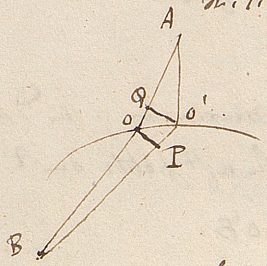
$$OB - OA = BP = AB \cos ABO$$
$$O'A - O'B = AQ = AB \cdot \cos BAO'$$

On doit donc avoir

$$AB(\cos ABO - \cos BAO') = 0$$

par suite il faut que les angles ABO, BAO' soient égaux à la limite et que p.c.s. les deux rayons OA et $O'A$ coupent la courbe sous des angles égaux. —

Deux milieux sont tels qu'un mobile se meut avec vitesse v dans le 1er milieu, et avec une vitesse v' dans le second ; ils sont séparés par une courbe (située dans un plan) que le mobile ne doit pas quitter ; trouver le chemin que ce mobile doit suivre pour arriver dans le moins de temps possible d'un point A du 1er milieu en un point B du second.



Soit AOB le chemin cherché ; il faut que le chemin AOB soit parcouru dans le même temps que le chemin voisin AO'B, les infiniment petits du second ordre étant toujours négligés. Si des points O et O' on abaisse des perpend. OP et O'Q, l'accroissement du temps du trajet quand on substitue AO'B à AOB est

$$\frac{O'P}{v'} - \frac{OQ}{v}$$

mais on a

$$O'P = OO' \cos OO'P$$
$$OQ = OO' \cos O'OQ.$$

on doit donc avoir

$$\frac{\cos OO'P}{v'} - \frac{\cos O'OQ}{v} = 0$$

et par suite les cosinus des angles formés par les rayons vecteurs avec la ligne de séparation doivent être proportionnels aux deux vitesses. —

Expression qui se présentent sous une forme indéterminée.

—

Nous établirons d'abord le lemme suivant:

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignant deux fonctions continues de x, on a quelque soit l'accroissement h attribué à x

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}$$

θ étant un nombre compris entre 0 et l'unité. (il ne faudrait pas regarder ce théorème comme évident, car ici nous supposons que θ soit le même au numérateur et au dénominateur; c'est précisément cette circonstance, que θ est le même dans les deux termes qui constitue un théorème nouveau.)

En effet on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x+\theta h)$$

quelque soit la fonction F. Cela veut dire que le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est égal à une valeur de la dérivée correspondante à une valeur ~~intermédiaire~~ de la variable intermédiaire entre les valeurs extrêmes x et $x+h$.

Or on peut appliquer ce théorème au rapport précédent.

75v

On peut en effet regarder $\varphi(x)$ comme une fonction dont la variable est $\psi(x)$. — Il est clair que si l'on pose $\psi(x) = u$ et $\psi(x+h) = u+k$.
$\varphi(x)$ pourra être considérée comme une fonction de u designons la par $F(u)$. — nous aurons en vertu du theoreme de Taylor

$$\frac{F(u+k) - F(u)}{k} = F'(u+\theta k)$$

mais

$$F(u+k) - F(u) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

$$k = \psi(x+h) - \psi(x)$$

$$F'(u) = \frac{d\varphi(x)}{d\psi(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

$$F'(u+\theta h) = \frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

—

Lorsque deux termes d'une fraction étant fonctions de x s'annullent ou deviennent infinis pour une valeur particulière de cette variable, la fraction prendra une forme indéterminée ; mais il importe souvent de savoir déterminer la veritable valeur de la fraction, c. a d. la limite vers laquelle elle converge lorsque x s'approche de la valeur particulière pour laquelle la difficulté se présente.

Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. et a la valeur particulière pour laquelle on a

$$\varphi(a)=0 \quad \psi(a).=0$$

si h est une quantité très petite, on a :

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}$$

et par suite :

$$\lim. \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Il est facile de voir ici qu'il importait de démontrer le lemme préliminaire ; car supposons que l'on ait

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta' h)}$$

θ n'étant pas le même aux deux termes ; nous aurons

~~nous~~ $\lim. \frac{\varphi(a+h)}{\psi'(a+h)} = \lim. \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta' h)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$

Mais supposons qu'on ait encore

$$\varphi'(a)=0 \quad \psi'(a).=0$$

nous aurons à trouver la limite du rapport $\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta' h)}$ quand h tend vers zero ; mais nous ne pourrions plus appliquer la règle précédente, car la variable n'est pas la même dans les deux fonctions. —

76v

Si l'on a $\varphi'(a)=0 \quad \psi'(a)=0$

le théorème précédent prouve que la limite de $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$

est la même que celle de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; on peut donc lui

appliquer la même règle, et la véritable valeur est

même valeur que celle de $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$; si $\varphi''(a)$ et $\psi''(a)$

ne sont pas nuls, la question est résolue; s'ils sont tous

deux égaux à zéro, le même théorème appliqué une

3e fois prouve que la limite est la même que celle

$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}$; etc. etc. —

Supposer que les deux termes de la fraction

deux $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

deviennent infini pour $x=a$. (voir Sturm).

Il est bon de remarquer que dans ce cas la

règle ne fait que substituer une difficulté à une autre

Si pour la valeur $x=a$, une fonction $\varphi(x)$ devient

infinie, sa dérivée devient aussi infinie. Soit

en effet $a-h$ une valeur ~~particulière~~ fixe de x

aussi voisine que l'on voudra de a, et

$a-h'$ une valeur variable que nous ferons tendre

vers a nous aurons:

$$\frac{\varphi(a-h') - \varphi(a-h)}{h-h'} = \varphi'(a-h+\theta(h-h'))$$

Si h' tend vers zero, h étant fixe, le 1er membre augmente indéfiniment, et par suite la derivée $\varphi'(x)$ devient aussi grande que l'on veut pour une valeur particulière de x comprise entre a et $a-h$; cela ayant lieu quelque petit que soit h, il est clair que cette derivée est necessairement infinie pour $x = a$.

La geométrie conduit a la meme conclusion. Si la fonction $\varphi(x)$ est infinie pour $x = a$, la courbe dont l'equation est

$$y = \varphi(x)$$

a pour asymptote la parallele a l'axe des y dont l'abcisse est a; et par suite pour les points voisins la tangente tend a devenir parallele à l'axe des y.

Examinons le cas où la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

prend la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur infinie de x. (Voir Sturm). —

77 v

Lorsqu'une fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ pour des valeurs attribuées simultanément à deux variables x et y, elle est en général absolument indéterminée et sa limite dépend de la loi que suivent les variables en s'approchant des valeurs pour lesquelles la difficulté se présente.

Soit en effet $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$

une fonction qui pour $x=a$ $y=b$ prenne la forme indéterminée. Posons

$$x = a+h$$
$$y = b+k$$

Nous aurons, en remarquant que $\varphi(a,b)=0$ et $\psi(a,b)$

$$\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} = \frac{\varphi(a+h,b+k)}{\psi(a+h,b+k)} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{da}\right)h + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)k + R}{\left(\frac{d\psi}{da}\right)h + \left(\frac{d\psi}{db}\right)k + R_1}$$

Si h et k tend vers zéro, R et R_1 peuvent être négl. par rapport aux termes précédents et l'on a

$$\lim \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} = \lim \frac{\left(\frac{d\varphi}{da}\right)h + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)k}{\left(\frac{d\psi}{da}\right)h + \left(\frac{d\psi}{db}\right)k} = \lim \frac{\frac{d\varphi}{da} + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)}{\frac{d\psi}{da} + \left(\frac{d\psi}{db}\right)}$$

il est clair que la limite du second membre

dépend de la valeur attribuée au rapport $\frac{k}{h}$, lequel peut avoir une infinité de valeurs, pendant que h et k tendent vers zéro.

On peut remarquer que le rapport $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ aurait exceptionnellement une limite déterminée si l'on avait

$$\frac{\frac{d\varphi}{da}}{\frac{d\psi}{da}} = \frac{\frac{d\varphi}{db}}{\frac{d\psi}{db}}$$

---

il existe d'autres formes indéterminées qui se ramènent aux précédentes. Soit une expression de la forme

$$\varphi(x)^{\psi(x)}$$

qui peut devenir pour une valeur particulière de x. ∞^0 0^0 1^∞ -

Le logarithme d'une telle expression est

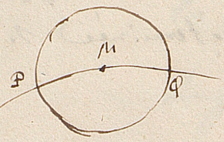
$$\psi(x)\log\varphi(x)$$

qui dans les deux cas se présente sous la forme $0\times\infty$, équivalente évidemment à $\frac{0}{0}$. On pourra donc appliquer les règles précédentes à la

détermination du logarithme de l'expression proposée par suite à celle de l'expression elle même. —

—

Points singuliers



Si l'on prend sur une courbe un point M et que de ce point comme centre on décrive un cercle de rayon infiniment petit, il coupera généralement la courbe en deux points dont la distance à la tangente en M sera infiniment petite du second ordre, de sorte que cette tangente étant un diamètre du cercle, on peut regarder les points d'intersection de celui-ci avec la courbe comme diamétralement opposés, en ce sens que les rayons MP, MQ qui y aboutissent font un angle infiniment peu différent de deux droits.

Toutes les fois que la condition précédente n'est pas remplie, le point M est regardé comme un <u>point singulier</u>. Cette dénomination comprend les points de rebroussement qui sont tels que MP et MQ aboutissant aux deux points d'intersection de la courbe et du cercle font un angle infiniment petit. —

On les distingue en points de rebroussement de première espèce ou de seconde espèce, suivant que les deux branches de la courbe sont situées de côtés différents ou d'un même côté par rapport à la tangente commune.

*

Les points d'arrêt qui sont tels que le cercle ne coupe la courbe qu'en un point.

Les points angulaires pour lesquels il y a deux intersections P et Q telles que les rayons MP, MQ font un angle fini qcq.

Les points multiples où se croisent plusieurs branches de courbe tangentes ou non les unes aux autres.

Les points isolés qui ne sont voisins d'aucun autre point de la courbe et tels par conséquent que le cercle C n'a avec elle aucun point commun.

Tous les points singuliers peuvent être découverts dans toute courbe dont on a l'équation à l'aide du théorème suivant:

Si l'équation d'une courbe est

$$F(x,y) = 0$$

La fonction F étant continue et parfaitement déterminée pour chaque valeur de x et de y, les coord. x et y d'un point singulier satisfont aux deux équations

$$(1)\ \frac{dF}{dx} = 0 \quad (2)\ \frac{dF}{dy} = 0.$$

Supposons en effet que les coordonnées α, β d'un point de la courbe ne vérifient pas les équations (1) et (2), si $\alpha+h$ et $\beta+k$ désignent les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec le cercle de rayon R décrit du point M comme centre, on a

$$h = R\cos u$$
$$k = R\sin u.$$

79v

et par suite

$$F(\alpha + R\cos u, \beta + R\sin u) = 0$$

ou bien en remarquant que $F(\alpha, \beta) = 0$

$$\frac{dF}{d\alpha} R\cos u + \frac{dF}{d\beta} R\sin u + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{d\alpha^2} R^2 \cos^2 u + \frac{d^2F}{d\alpha\, d\beta} R^2 \sin u \cos u + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{d\beta^2} R^2 \sin^2 u + \ldots$$

$$\frac{dF}{d\alpha} R\cos u + \frac{dF}{d\beta} R\sin u + MR^2 = 0.$$

ou

$$\frac{dF}{d\alpha} \cos u + \frac{dF}{d\beta} \sin u + MR = 0$$

M désignant une quantité qui tend vers une limite finie lorsque R diminue indéfiniment.

La valeur de u qui satisfait à cette équation lorsque R est infᵗ petit doit évid. différer fort peu de celle qui est donnée par la relation

$$\frac{dF}{d\alpha} \cos u + \frac{dF}{d\beta} \sin u = 0$$

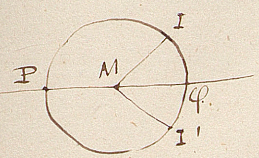
ou

$$\operatorname{tg} u = -\frac{\frac{dF}{d\alpha}}{\frac{dF}{d\beta}}$$

Direction unique et parfaitement déterminée, puisque $\frac{dF}{d\alpha}$ et $\frac{dF}{d\beta}$ ne sont ~~pas hypothèse~~ par hypothèse égaux l'un et l'autre à zéro.

On en conclut que la courbe proposée, dans le voisinage du point M ne peut avoir qu'une seule tangente

Mais nous allons montrer de plus que si cette tangente coupe le cercle du rayon R en un point P et Q, la courbe proposée le coupe elle même en deux points et pas davantage, et que l'un de ces points est infiniment voisin du point P, et l'autre du point Q.



Considérons en effet à droite et à gauche du point Q, et sur le cercle PQ, deux points I et I' correspondants à deux rayons MI MI' inclinés sur MQ d'un angle fini θ. et substituons dans l'équation

$$\frac{dF}{d\alpha}\cos u + \frac{dF}{d\beta}\sin u + MR = 0$$

à l'angle u

Courbure des lignes planes

La courbure totale d'un arc de courbe ne présentant pas d'inflexion est l'angle formé par les tangentes extrêmes et la courbure moyenne est, par définition, le rapport de la courbure totale à la longueur de l'arc considéré. Si l'on suppose que l'arc devienne de plus en plus petit, sa courbure moyenne tend vers une limite que l'on nomme courbure de la courbe au point auquel il tend à se réduire.

Il est facile, d'après cette définition, de calculer la courbure d'un arc de courbe dont l'éq. est donnée. Soit en effet

$$y = \varphi(x)$$

cette équation; l'angle α formé par la tangente avec l'axe des x est donné par la formule

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

ou

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}.$$

L'angle des deux tangentes consécutives est la différence $d\alpha$ des angles formés par chacune d'elles avec l'axe des x.

On a:

$$d\alpha = d.\operatorname{arc\,tg}\frac{dy}{dx} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

D'ailleurs l'arc infiniment petit ds est

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,;$$

par suite la courbure $\frac{d\alpha}{ds}$ est

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si la courbe considérée est un cercle, l'angle de deux tangentes est égal à l'angle au centre correspondant et mesuré par le rapport de l'arc au rayon ~~correspondant~~ du cercle ; la courbure moyenne est alors, quel que soit l'arc considéré, égale à l'inverse du rayon ; en sorte que la courbure d'un cercle est constante et égale à l'inverse du rayon —

D'après cela, quelle que soit la courbure d'une courbe, on peut toujours concevoir un cercle qui la partage, et le rayon de ce cercle, nommé rayon de courbure de la courbe est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où

$$\rho = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

un cercle tangent à la courbe considérée, ayant sa convexité dans le même sens, un rayon égal à son rayon de courbure, se nomme Cercle de courbure.

Le centre du cercle de courbure est la limite du point d'intersection de deux normales consécutives. —

Menons en un point O d'une courbe plane, sa normale MO rencontrée en O par une normale voisine M'O. Je dis que lorsque M' se rapproche de M, la limite du point O est le centre de courbure.

Décrivons en effet du point O comme centre avec OM pour rayon, un arc de cercle MI, tangent à la courbe donnée et terminé au point I où il coupe M'O. L'angle O dans ce cercle sera égal au rapport de l'arc MI au rayon MO; on aura donc:

$$\frac{1}{MO} = \frac{\text{angle } O}{MI}.$$

or l'angle O est rigoureusement égal à l'angle des deux tangentes menées en M et M' à la courbe proposée; quant à l'arc MI, on peut en négligeant les inft petits d'un ordre supérieur

au premier, le remplacer par sa corde; et comme MI distance de deux courbes tangentes, est tout au plus du second ordre, on peut même remplacer la corde MI par la corde MM', et par suite par l'arc MM'. En sorte que le rapport

$$\frac{\text{Angle } O}{MI}$$

a la même limite que le rapport

$$\frac{\text{Angle } O}{MM'}.$$

et tend par suite vers la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe en sorte que MO tend vers ρ.

Le cercle de courbure d'une courbe est souvent désigné sous le nom de cercle osculateur; nous allons indiquer l'origine de cette dénomination et démontrer la propriété qu'elle rappelle.

Lorsque deux courbes, ont un point commun, ayant pour abcisse a, si leurs équations sont mises sous la forme

$$y = \varphi(x)$$
$$y = \psi(x)$$

les coordonnées se confondant pour $x = a$, et l'on a

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Mais pour un point voisin qcq, dont nous désignerons l'abcisse

Par $a+h$, les courbes se séparent, et les ordonnées

$$\varphi(a+h) \qquad \psi(a+h)$$

sont inégales — leur différence

$$\varphi(a+h)-\psi(a+h)$$

représente en quelque sorte l'écartement des deux courbes. Or on a par le théorème de Taylor

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\cdots\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a+\theta h)$$

$$\psi(a+h)=\psi(a)+h\psi'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{n-1}(a)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^n(a+\theta h).$$

et par suite en ayant égard à

$$\varphi(a)=\psi(a).$$

on a :

$$\varphi(a+h)-\psi(a+h)=h\left(\varphi'(a)-\psi'(a)\right)+\frac{h^2}{1.2}\left(\varphi''(a)-\psi''(a)\right)+\cdots$$

$$+\cdots\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left(\varphi^{n-1}(a)-\psi^{n-1}(a)\right)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left(\varphi^n(a+\theta h)-\psi^n(a+\theta h)\right)$$

On voit que dans le cas le plus ordinaire, la différence $\varphi'(a)-\psi'(a)$ n'étant pas nulle, la portion d'ordonnée comprise entre les deux courbes est de même ordre de grandeur que h, c.a.d. est infᵗ petit du 1ᵉʳ ordre — si

$$\varphi'(a)=\psi'(a)$$

c.a.d. si les courbes ont même tangente, cette distance contient h^2 en facteur et est infᵗ petite du second ordre. —

84v

Si de outre on a

$$\varphi''(a) = \psi''(a)$$

cette distance devient infᵗ petite du 3ᵉ ordre.

En général, si les p premières dérivées de φ sont ég. pour $x=a$ aux p premières dérivées de ψ, la diff.

$$\varphi(a+h) - \psi(a+h)$$

contiendra h^{p+1} en facteur, et sera infᵗ petit de l'ordre $p+1$

Cela posé, on dit que deux courbes ont un contact de l'ordre p, lorsque la portion comprise entre elles sur une ordonnée située à une distance infᵗ petite du point de contact est un infᵗ petit de l'ordre p+1.

Lorsqu'une courbe a, avec une autre courbe, en un point donné, le contact le plus élevé que puissent comporter les éléments dont on peut disposer pour la déterminer, on dit qu'elle est osculatrice

La droite osculatrice d'une courbe est sa tangente, elle a un contact du 1ᵉʳ ordre.

Nous allons prouver que le cercle osculateur d'une courbe est le cercle de courbure, et qu'il a, en général, avec elle un contact du second ordre —

Soit $$y = \varphi(x) \qquad (1)$$
l'équation de la courbe considérée.
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (2)$$
l'équation inconnue du cercle osculateur en un point $x\,y$. On doit disposer de $\alpha\ \beta\ R$, de manière à ce que pour une valeur donnée de x, l'ordonnée y du cercle soit égale à celle de la courbe ainsi que le plus grand nombre possible de dérivées. Or on a en différentiant l'équation du cercle

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0.$$
$$2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Si l'on égale les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirées de ces équations à celles que fournit l'équation de la courbe on en déduira α et β. D'ailleurs R résultera de l'équation (2), et par suite le cercle sera entièrement déterminé; et il n'est pas possible d'obtenir un contact d'un ordre supérieur au second.

On tire des équations précédentes

$$y-\beta = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad x-\alpha = -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

$$R = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

et par suite le rayon du cercle osculateur est précisément ég
au rayon de courbure.

Lorsqu'on prend l'arc s pour variable indépendante, l'exp
précédente est toujours exacte ; mais on peut la remplacer p
la suivante

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

En coordonnées polaires on a :

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

Le rayon de courbure d'une section conique est égal à
$\frac{N^3}{p}$, N étant la normale terminée à l'axe et p le
paramètre $\frac{b^2}{a}$

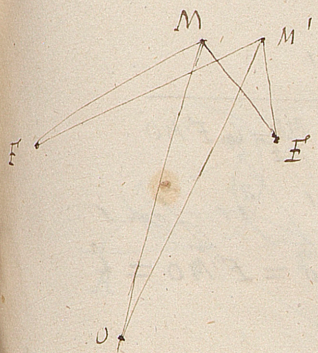
Le rayon de courbure de la lemniscate représentée par
l'équation $\rho = a\sqrt{2}\,\sqrt{\cos 2\omega}$
est inversement proportionnel au rayon vecteur, et par conséq
infini à l'origine où la courbe présente une inflexion.

En général, en un point d'inflexion la cou
est nulle, et le rayon de courbure infini. ——

La géométrie permet, dans un grand nombre de cas, de déterminer le rayon de courbure d'une courbe sans recourir aux formules précédentes.

Lorsque la définition de la courbe permet d'obtenir une construction simple de la ~~courbe~~ normale, on peut souvent en déduire la position du point d'intersection de deux normales infᵗ voisines.

Nous prendrons pour exemple la détermination du rayon de courbure de l'ellipse.



Soient F et F' les deux foyers de l'ellipse et M un de ses points. La normale en M est, comme on sait, la bissectrice de l'angle FMF'. Soit M' un point voisin de M. La normale M'O en ce point sera la bissectrice de l'angle FM'F', et le point O où elle coupe MO aura pour limite le centre de courbure cherché.

Or on a en regardant MM' comme un arc de cercle dont il ne diffère que d'un infᵗ petit du 3ᵉ ordre, on a :

$$OM = R = \frac{MM'}{\text{angle } MOM'}$$

Mais on a rigoureusement

$$MOM' = \tfrac{1}{2}F + \tfrac{1}{2}F'$$

Donc $$R = \frac{2MM'}{F+F'}$$

abaissant du point M une perpend. sur FM', on aura

$$MP = FM \sin F.$$

Mais en remplaçant MM' par sa corde on a:

$$MP = MM'\cos \overline{MP, MM'} = MM'\cos FMO$$

donc $$\sin F = \frac{MM'}{MF}\cos FMO$$

On trouvera de la même manière

$$\sin F' = \frac{MM'}{MF'}\cos F'MO$$

En remarquant que F et F' peuvent être remplacés par leur sinus, on a:

$$R = \frac{2MM'}{F+F'} = \frac{2MM'}{\frac{MM'}{MF}\cos FMO + \frac{MM'}{MF'}\cos F'MO}$$

Supprimant le facteur commun MM', et posant

$$MF = \delta, \quad MF' = \delta', \quad FMO = F'MO = i$$

il vient:

$$R = \frac{1}{\cos i\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right)} = \frac{\delta\delta'}{(\delta+\delta')\cos i} = \frac{\delta\delta'}{2a\cos i}$$

Telle est l'expression du rayon de courbure d'une ellipse

En posant $FF' = 2c$, on a dans le triangle FF'

$$4c^2 = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta'\cos 2i = (\delta+\delta')^2 - 2\delta\delta'(1+\cos 2i)$$

$$4c^2 = 4a^2 - 4\delta\delta'\cos^2 i$$

en posant selon la notation habituelle

$$a^2 - c^2 = b^2$$

il viendra

$$\delta\delta' = \frac{b^2}{\cos^2 i}$$

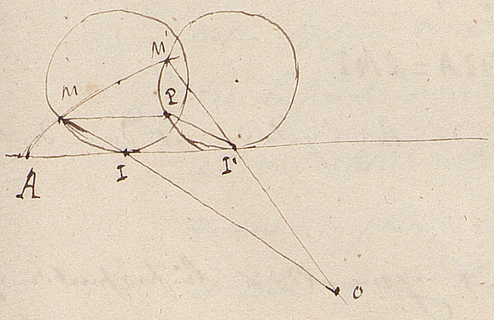
$$R = \frac{b^2}{a \cos^3 i} = \frac{p}{\cos^3 i}$$

p designant le paramètre. —

Considérons en second lieu une cycloïde engendrée par un cercle de rayon a, qui roule sur une droite indéfinie AX

La normale au point M est comme on sait MI — de même la normale au point voisin M' sera M'I

On aura comme précédemment:



$$MO = R = \frac{MM'}{MOM'}.$$

Par le point M je mène une parallèle MP, à la base de la cycloïde terminée au point où elle rencontre le cercle M'I'.

On aura évidemment:

$$\text{arc } MI = \text{arc } PI'$$

et comme $\text{arc } MI = AI$

$$\text{arc } M'I' = AI'$$

on conclut $\text{arc } M'P = II'.$

87 v°

or PI' est parallèle à MI ; l'angle MOM' des deux normales est donc égal à un angle PIM', ayant son sommet sur la circonférence d'un cercle de rayon a et sous-tendant un arc égal à II'. On a par conséquent

$$MOM' = \frac{II'}{2a}.$$

D'ailleurs $M'P = II'$

et l'on peut considérer MM'P comme un triangle isocèle dans lequel on a :

$$MM' = 2MP \cos \widehat{MP, MM'} = 2II' \sin MIA.$$

Donc

$$R = \frac{MM'}{MOM'} = \frac{2II' \sin MIA}{\frac{II'}{2a}} = 4a \sin MIA.$$

Mais on a évidemment

$$4a \sin MIA = 2MI.$$

Le rayon de courbure de la Cycloïde est donc double de la Normale —

On peut généraliser la proposition précédente et chercher le rayon de courbure d'une roulette g^{le} c.à.d. de la courbe engendrée par un point lié à une courbe mobile lorsque cette courbe roule sans glisser sur une courbe fixe —

Soient AOA' la courbe fixe, et BOB' une des positions de la courbe mobile, à l'instant où le point

qui décrit la roulette est le M. — pour obtenir un point M' de la roulette infᵗ voisin de M, il faut supposer que la courbe mobile roule sur la courbe fixe, de telle sorte que un point O_1 infᵗ voisin de O vienne se placer en contact avec un point O_2 de la ~~roulette~~ courbe fixe ; la condition géométrique du roulement exigeant que l'on ait

$$OO_2 = OO_1$$

or le mouvement que doit prendre pour cela la courbe mobile, peut être remplacé par deux autres effectués successivement : savoir une translation dans laquelle tous les points décriraient des droites égales et parallèles à O_1O_2, et une rotation autour du point O_2 telle que les normales viennent se placer dans le prolongement de la normale O_2N_2 et tourner suiv. d'un angle égal à celui des deux normales, c. a d. à la somme des angles formés par chacune d'elles avec ON.

Théorie des développées.

Le lieu des centres de courbure d'une courbe plane se nomme la développée. La développée est d'après cette définition, le lieu des intersections successives des normales à la courbe donnée, et p. c. la courbe enveloppe de ces normales. Nous démontrerons d'ailleurs directement qu'elle leur est tangente à toutes. —

La détermination de la développée résulte bien facilement de ce qui précède.

Soit (1) $f(x,y) = 0$

l'équation d'une courbe — les coord. α et β du centre de courbure sont données par les deux équations :

(2) $$x - \alpha + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

(3) $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Si donc entre les éq. (1) (2) (3) on élimine x et y, le résultat de cette élimination sera l'équation de la développée.

La développée jouit de deux propriétés remarquables que l'on peut déduire des équations précédentes.

1° La normale à une courbe est tangente au point correspondant de la développée

Pour le demontrer, reprenons les trois equations

$$(1) \qquad f(x,y) = 0$$

$$(2) \qquad (x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3) \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

qui par l'elimination de x et y conduiraient à une relation entre les coord. α, β d'un point qcq de la developpée. Pour en deduire le coefficient angulaire

$$\frac{d\beta}{d\alpha}$$

de la tangente à la developpée, differentions l'eq. (2) en remarquant que x, y, α, β sont quatre variables qui sont liés de telle sorte que la variation de l'une d'elles entraine la variation des trois autres; il viendra

$$dx - d\alpha + (dy - d\beta)\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}dx = 0.$$

et en ayant egard à l'eq. (3) qui multipliée par dx donne

$$dx + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{dy}{dx}dy = 0$$

il vient

$$-d\alpha - d\beta\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ce qui montre que les deux tangentes sont perpendiculaires et la normale a la courbe proposée est precisement la tangente a la développée.

Cette proposition remarquable résulte facilement de considérations geometriques. Considerons en effet une série de normales, menées en des points fort rapprochés, les uns des autres. Ces normales formeront un polygone dont les sommets seront à la limite le point d'intersection de deux normales infᵗ voisines et, par suite, les centres de courbure correspondants aux divers points de la courbe donnée. Ce polygone, à la limite, sera donc le lieu des centres de courbure et se confondra avec la developpée à laquelle les côtés, qui sont les normales de la courbe proposée, sont ses tangentes.

2° Un arc quelconque de la developpée d'une courbe est égal à la difference des rayons de courbure aux deux points qui correspondent à ses extremités.

Pour le démontrer, reprenons les equations:

$$(1) \quad f(x,y)=0$$

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

qui definissent la développée, et adjoignons leur l'equation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

qui represente le cercle osculateur. Différentions cette dernière équation, en y considérant x, y, α, β, R comme cinq variables qui sont evidemment des fonctions

91v

de l'une q.c.q. d'entre elles ; nous aurons :

$$(x-\alpha)(dx-d\alpha)+(y-\beta)(dy-d\beta)=RdR,$$

x et y désignant ici les coord. d'un point de la courbe et non pas celles d'un point du cercle osculateur car si l'on voulait faire cette hypothèse, α, β et R varieraient pas avec x et y.

En ayant égard à l'éq. (a), cette éq. devient

$$-(x-\alpha)d\alpha-(y-\beta)d\beta=RdR.$$

ou $$dR=-\frac{x-\alpha}{R}d\alpha-\frac{y-\beta}{R}d\beta.$$

$\frac{x-\alpha}{R}$, $\frac{y-\beta}{R}$ sont les cosinus des angles formés avec les axes par la normale à la courbe proposée qui réunit les points dont les coord. sont x, y, α, β. et dont la distance est R. Cette normale étant tangente à la développée, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes peuvent être représentés par

$$\frac{d\alpha}{d\sigma},\ \frac{d\beta}{d\sigma}.$$

~~et à cause de~~

~~$$d\alpha^2+d\beta^2=d\sigma^2$$~~

et alors on a

$$dR=-\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{d\sigma}=-d\sigma$$

car $d\alpha^2+d\beta^2=d\sigma^2$.

R et σ ayant même différentielle, on a

$$R = -\sigma + C.$$

On aurait de même pour un autre point

$$R' = -\sigma' + C$$

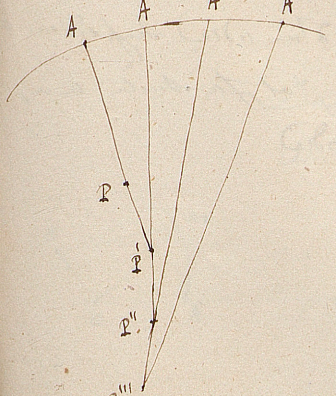
et par suite :

$$R' - R = \sigma - \sigma'$$

Ce qui montre que l'arc $\sigma - \sigma'$ qui sépare deux points qcq de la développée est égal à la différence des rayons de courbure qui correspondent à ses extrémités.

La propriété précédente se rattache intimement à celle qui a donné lieu à la dénomination de développée.

Si l'on considère une courbe $AA'A''A'''$ et sa développée $PP'P''P'''$ ainsi que les normales AP, $A'P'$, $A''P''$ respectivement égales aux rayons de courbure, et qui ont leurs extrémités sur la développée, il résulte du théorème précédent que si l'on ajoute l'arc $P'''P$ de la développée avec PA, l'arc $P'''P'$ avec $P'A'$, l'arc $P'''P''$ avec $P''A''$, et enfin $P'''A'''$ tout seul, on aura toujours la même somme. Par conséquent les lignes en partie droites et en partie courbes $P'''PA$, $P'''P'A'$, $P'''P''A''$, peuvent être considérées comme la position successive d'un même fil de

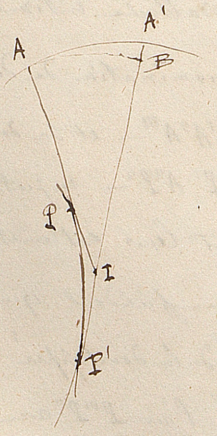


32 v

longueur $P'''A'''$, qui d'abord enroulé sur l'arc $P'''P$, la quitterait en P, pour se tendre suivant la tangente PA et qui se développerait successivement, sans changer de grandeur et en s'enroulant successivement sur des arcs de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'il coïncide avec $P'''A'''$.

On peut donner une démonstration géométrique simple de l'expression trouvée pour l'arc développé.

Soit AA' l'arc infᵗ petit d'une courbe qcq et PP' l'arc correspondant de la développée, en sorte que le rayon de courbure en A soit AP, et le rayon de courbure en A' soit $A'P'$.



Prolongeons AP et $A'P'$ jusqu'à leur rencontre et du point I comme centre décrivons un arc de cercle avec IA pour rayon. On aura

$$IA = IB.$$

Donc $$IA' - IA = BA'.$$

quantité infᵗ petite, du 2ᵉ ordre au moins. Par suite

$$P'A' - PA = IA' - IA + IP' + IP = BA' + IP' + IP.$$

Or, en négligeant les infᵗ petits d'un ordre supérieur au 1ᵉʳ, $IP' + IP$ est égal à l'arc PP', et par suite on a, en négligeant les infᵗ petits du 2ᵉ ordre

$$PP' = P'A' - PA$$

C. à d. $$d\sigma = dR.$$

Application de théorie précédente à qlq. courbes.

Soit la spirale

$$\rho = a e^{m\omega}.$$

Cette spirale coupe tous ses rayons vecteurs sous le même angle. ~~en effet~~ en effet :

$$tg V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\omega}} = \frac{1}{m}.$$

Rayon de courbure – l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires est

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2}}$$

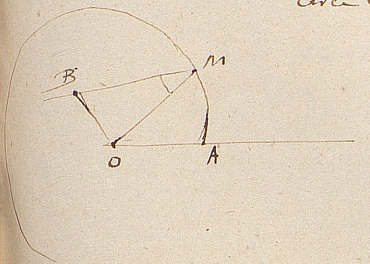
dans le cas actuel :

$$\frac{d\rho}{d\omega} = m a e^{m\omega} = m\rho.$$

$$\frac{d^2\rho}{d\omega^2} = m^2 a e^{m\omega} = m^2\rho.$$

$$R = \frac{\left(\rho^2(1+m^2)\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2(1+m^2)} = \rho\sqrt{1+m^2}.$$

Donc le rayon de courbure est dans un rapport constant avec le rayon vecteur.



Soit un point M ; MB le rayon de courbure de la courbe en ce point. Comme l'angle en M est constant, et que d'ailleurs

-93v

le rapport des cotés MO et MB est constant, il en résulte que le triangle BOM est toujours semblable à lui même, par suite l'angle BOM est constant.

Mais on a $\operatorname{tg} V = \frac{1}{m}$, V étant l'angle que la tangente au point M fait avec le rayon vecteur; par suite la tangente de l'angle BMO est égale à m. — donc la valeur $R = \rho\sqrt{1+m^2}$

peut s'écrire

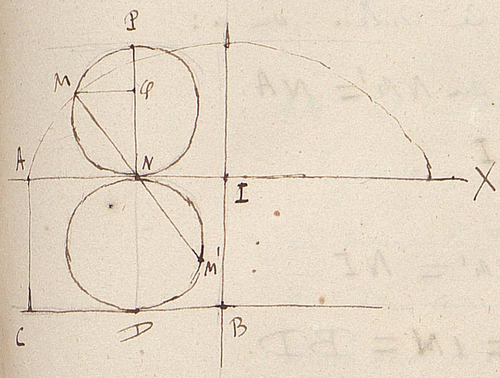
$$R = \frac{\rho}{\cos BMO}$$

ce qui montre que l'angle BOM est un angle droit.

Ceci nous permet de trouver bien simplement le lieu des points C, c.a.d. le lieu des centres de courbure. Pour avoir le lieu des points C, il suffit évid. de faire tourner tous les rayons vecteurs de 90° et de les réduire dans un rapport constant. Le lieu des points C est donc une spirale semblable à la première. —

Developpée de la cycloïde

Je commencerai par déterminer le centre de courbure.



On a.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$$

ou tire de là : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1$.

$$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

ou $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$

Substituant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'expression connue du rayon de courbure, on trouve pour sa grandeur absolue

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\left(\frac{a}{y^2}\right)^2} = \frac{8a^2y}{a^2}$$

$$\rho = 2\sqrt{2ay}.$$

Or $\sqrt{2ay} = \sqrt{NP \times NQ} = MN$.

Donc le rayon de courbure est double de MN et comme MN est la normale au point M, en prenant sur cette droite une longueur $MM' = 2MN$ le point M' sera le centre de courbure de la courbe au point M.

94 v

Ce résultat permet de déterminer très simplement la développée de la cycloïde sans qu'il soit nécessaire de chercher son équation.

Soit en effet ND un cercle égal au cercle générateur, et tangent au point N à la droite AX ; il est clair que le point M' se trouve sur le cercle. on a :

$$\text{arc } NM = \text{arc } NM' = NA.$$

D'ailleurs $HM'D = AI$

par suite

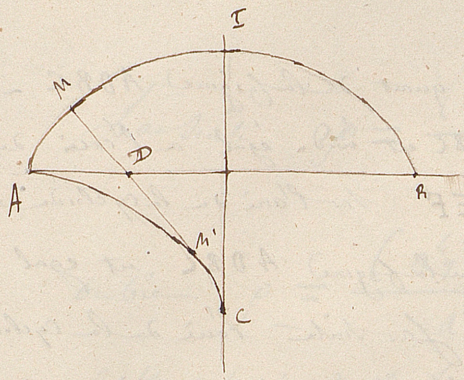
$$\text{arc } HM'D - \text{arc } NM' = NI$$

$$\text{arc } DM' = IN = BD.$$

Ceci fait voir que la développée de la cycloïde donnée est une cycloïde égale à celle-ci, engendrée par le mouvement d'un point M' placé sur la circonférence d'un cercle égal au cercle PN, mais qui roulerait sur une parallèle ~~au cercle~~ à la droite AX, au dessous de cette droite et située à une distance égale au diamètre du cercle mobile.

il est facile de déduire de là la longueur d'un arc de cycloïde.

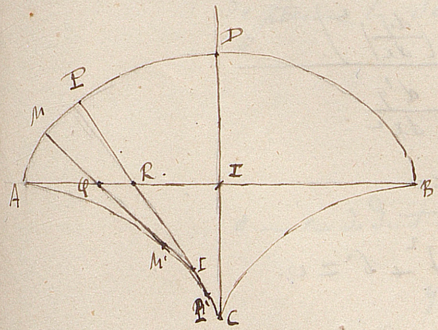
Considérons l'arc AM' ; cet arc est égal à la différence des rayons de courbure (qui correspondent aux ~~les~~ points A et M' ~~extrémités~~ de la courbe AIB ; or le rayon de courbure au point A est nul



le rayon de courbure au point M est MM'; donc l'arc M'A est égal à la droite M'M; laquelle est le double de M'D.

AM' est un arc de cycloïde compté à partir du sommet A; d'après ce qui précède pour avoir la longueur de l'arc AM', on mènera la tangente au point M' jusqu'à sa rencontre en D avec la droite AB tangente au sommet; on prolongera M'D d'une quantité DM = DM' et la longueur M'D sera la longueur de l'arc de cycloïde AM'.—

Cette théorie de la développée va nous permettre de trouver encore très facilement la surface de la cycloïde — soit la cycloïde ADB, et la développée AM'C; soient deux normales voisines MM', PP' lesquelles se coupent en I, le point I étant infiniment voisin des points M' et P'.— Considérons les deux triangles MPI, QRI; ils ont un angle égal en I; de plus IQ et IR sont la moitié de IM et IP; donc la surface du triangle IQR est le quart de la surface du triangle MIP; par suite la surface de la figure



95v

AIBC et le quart de la figure ADBC — mais l'aire de la figure AIBC est évid. égal à l'excès de l'aire du rectangle ABEF sur l'aire de la cycloïde ADB — Donc l'aire de la figure ADBC est égal à l'aire du rectangle, et par suite, l'aire de la cycloïde est égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire du rectangle ; cette aire vaut donc $\frac{3}{4} 4\varpi a^2 = 3\varpi a^2$, c.à.d. 3 fois l'aire du cercle générateur. —

Développée de l'ellipse.

L'équation de l'ellipse est :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Cherchons d'abord l'expression du rayon de courbure

$$\rho = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

on a

$$a^2y\frac{dy}{dx} + b^2x = 0$$

$$a^2y\frac{d^2y}{dx^2} + a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b^2 = 0.$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Par suite $\rho = \dfrac{\left(1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{b^4}{a^2y^3}}$

ou bien $\rho = \dfrac{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$

Cette expression montre bien que ρ est égal au cube de la Normale au point considéré divisé par le carré du demi-paramètre. En effet soit n la longueur de la Normale en ce point, on a:

$$n^2 = y^2 + \left(\frac{y\,dy}{dx}\right)^2 = y^2 + \frac{b^4x^2}{a^4} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4}.$$

d'où $n^3 = \dfrac{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^6}$

Comme le demi paramètre est $p = \dfrac{b^2}{a}$, on a

$$\frac{n^3}{p^2} = \frac{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^6} \times \frac{a^2}{b^4} = \frac{\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \rho.$$

Cherchons maintenant la développée de l'ellipse. Reprenons les deux équations:

$$x-\alpha + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

On en déduit:

$$y-\beta = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$x-\alpha = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

$$y-\beta = \frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)a^2y^3}{b^4} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4}$$

$$x-\alpha = \frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\frac{b^2x}{a^2y}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)x}{a^4b^2}$$

Il faut maintenant éliminer x et y entre les deux éq. et celle de l'ellipse. Pour cela on a recours à l'artifice suivant: on élimine y de l'équation qui donne α; on élimine x de l'éq. qui donne β.

de l'éq. de l'ellipse on tire

$$x^2 = \frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}$$

Substituant dans la valeur de $y-\beta$ il vient:

$$y-\beta = \frac{\left(a^4y^2+\frac{b^4a^2(b^2-y^2)}{b^2}\right)y}{a^2b^4}$$

$$y-\beta = \frac{a^2y^3+b^4y-b^2y^3}{b^4}$$

$$\beta = \frac{(b^2-a^2)y^3}{b^4}$$

Pour avoir α, il suffit de changer a en b, b en a, x en y et y en x; on a:

$$\alpha = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}$$

on a donc

$$y^3 = \frac{-b^4\beta}{c^2} \qquad x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2}$$

$$y = -\left(\frac{b^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} \qquad x = \left(\frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}$$

en substituant dans l'eq. de l'ellipse on a:

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

qui est l'eq. de la développée

Courbes enveloppes.

Lorsque l'eq. d'une courbe plane contient une lettre arbitraire (à laquelle on donne le nom de paramètre) la courbe peut prendre dans le plan un nombre infini de formes et de positions différentes. On nomme courbe enveloppe de cette courbe mobile, une ligne fixe à laquelle elle reste tangente dans toutes ses positions. Il est facile de voir géométriquement que la courbe enveloppe est le lieu des points où chaque courbe mobile est coupée par la courbe infᵗ voisine.

Si l'on considère en effet la série des courbes qui correspondent à des valeurs du paramètre croissant par petits intervalles, les points d'intersection de chaque courbe avec la courbe infᵗ voisine formeront les sommets d'un polygone curviligne dont chaque côté sera un petit arc appartenant à l'une des courbes. La limite de ce polygone est evid. une ligne tgᵗᵉ à toutes les courbes proposées et passant par l'intersection de chacune d'elles avec la courbe infᵗ voisine. —

97 r

Proposons nous de trouver l'éq. de la courbe enveloppe. Soit (1) $\varphi(x,y,a)=0$

l'éq. de la courbe mobile, qu'on nomme enveloppée. L'éq. de la courbe infᵗ voisine est

$$(2)\quad \varphi(x,y,a+da)=0$$

Pour avoir un point de l'enveloppe, il faudrait résoudre les deux éq. (1) et (2). On peut substituer à l'une d'elles l'éq. obtenue en les retranchant l'une de l'autre et divisant la différence par da; ce qui donne (3) $\dfrac{d\varphi(x,y,a)}{da}=0$

et pour avoir le lieu du point considéré, c. a. d. l'enveloppe, il faut éliminer a entre (1) et (3).

L'enveloppe des lignes représentées par

$$\varphi(x,y,a)=0$$

s'obtient en éliminant la constante a entre l'éq. et sa dérivée par rapport à la constante.

On peut démontrer analytiquement que la courbe obtenue en éliminant a entre

(1) $\varphi(x,y,a)=0$

(2) $\dfrac{d\varphi(x,y,a)}{da}=0$

représente une courbe tangente à chacune des ~~deux courbes proposées~~ enveloppées.

Supposons en effet que les éq. (1) et (2) soient satisfaites par $x=x_1$ $y=y_1$ $a=a_1$

Le point x, y, appartient alors à la courbe enveloppée qui correspond à l'hypothèse $a = a_1$. Or je dis qu'en ce point, cette courbe et celle qui résulte de l'élimination de a entre (1) et (2) ont même tangente.

Pour éliminer a entre (1) et (2) on peut en effet déduire sa expression de (2), en fonction de x et de y, (expression dont la valeur numérique est a_1) et la remettre dans (1). Cela fait, pour obtenir le coefficient angulaire de la tgte, on différentiera l'équation (1), et l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{da}\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais pour le point considéré et pour la valeur admise pour a, on a

$$\frac{d\varphi}{da} = 0$$

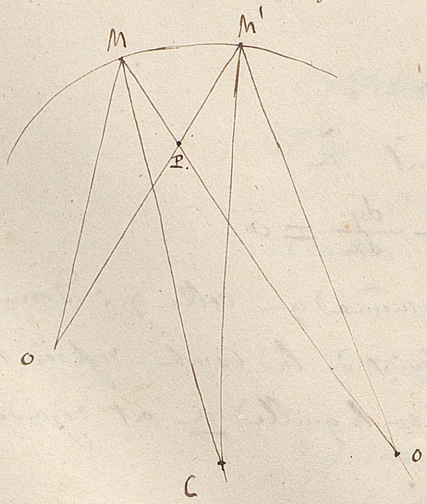
et l'équation se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

elle est p.c. la même que celle qui donne la tangente au même point de la courbe représentée par l'équation (1), dans laquelle $\underline{a}$ est regardée comme une constante.

Caustiques — Lorsque des rayons de lumière issus d'un même point et se mouvant dans un plan rencontrent un nouveau milieu, séparé par une courbe qcq de celui dans lequel ils étaient d'abord, ils peuvent être réfléchis ou réfractés suivant des lois que la Physique fait connaître. L'enveloppe de leurs directions nouvelles se nomme la caustique par réflexion ou par réfraction de la surface de séparation.

La détermination des caustiques est une conséquence très simple de la théorie générale des enveloppes. Nous nous bornerons à faire connaître, dans le cas de la réflexion, une formule très simple qui permet de calculer le point d'intersection de chaque rayon avec le rayon voisin, c.à.d. son point de contact avec la caustique.



Soient OM et OM' deux rayons voisins; MO', M'O' les deux rayons réfléchis. On a évid.

$$\frac{M'P}{M'O'} = \frac{\sin O'}{\sin M'PO'} \qquad \frac{MP}{MO} = \frac{\sin O}{\sin MPO}.$$

En divisant les deux eq. membre à membre et remarquant que les angles en P sont égaux comme opposés au sommet, on a:

$$\frac{MO}{M'O'} \times \frac{M'P}{MP} = \frac{\sin O'}{\sin O}.$$

Mais $\frac{M'P}{MP}$ a pour limite l'unité. Car dans le triangle MM'P, les angles en M et en M' ont des limites égales; on a donc plus simplement:

(A). $\lim. \frac{MO}{M'O'} = \lim. \frac{\sin O}{\sin O'} = \lim. \frac{O}{O'}$

or la normale MC, M'C fait entre elles un angle C rigoureusement égal à $\frac{O+O'}{2}$ et représenté par $\frac{MM'}{R}$, R étant le rayon de courbure de MM'; on a donc:

$$O+O' = 2C$$

$$\frac{O'}{O} + 1 = \frac{2C}{O}$$

$$C = \frac{MM'}{R}.$$

D'ailleurs, en abaissant du point M une perpend. MQ sur M'O, on a en négligeant les inf. petits du 2e ordre

$$O = \frac{MQ}{OM} = \frac{MM' \cos(MQ, MM')}{MO}.$$

Donc

$$\frac{O'}{O} = \frac{\frac{2MM'}{R} \cdot MO}{MM' \cos(MQ, MM')} - 1$$

$$\frac{O'}{O} = \frac{2MO}{R \cos(MQ, MM')} - 1$$

L'angle de MM' avec M'Q est celui que forme le rayon reflechi avec la normale MC; tout est donc connu dans le 2e membre; et par suite l'éq. (A) fera connaître la limite M'O'.

Lorsque le rayon reflechi est parallele, il faut modifier légèrement le raisonnement qui précède car le point O est alors situé à une distance infinie

99 v

On trouve facilement dans ce cas

$$\text{Lim. } MO' = \frac{1}{2} R \cos (O'MC).$$

Si l'on applique cette formule au cas où des rayons parallèles sont réfléchis par la circonférence d'un cercle, on trouve que la caustique est une épicycloïde engendrée par un cercle de rayon quatre fois moindre que celui du cercle réflecteur roulant sur un cercle de rayon double du sien, et concentrique au cercle réflecteur. —

Surfaces enveloppes.

Lorsque l'éq. d'une surface contient un paramètre elle peut se mouvoir dans l'espace en se déformant d'une manière continue quand la valeur attribuée au paramètre vient à changer. Le lieu des intersections de chaque surface avec la surface inf^t voisine touche, suivant une courbe, chacune des surfaces considérées et se nomme la surface enveloppe de celles-ci

Si l'on attribue en effet au paramètre arbitraire une série de valeurs croissant par petits intervalles, on obtiendra une série de surfaces, et chacune d'elles coupera la suivante suivant une courbe; sur chaque surface on aura deux de ces courbes provenant de leur intersection par celle qui précède et par celle qui suit; entre ces deux courbes est comprise

une zone ; à la limite, l'ensemble de la zone forme une surface lieu des intersections successives des surfaces proposées et qui touche [illegible] chacune d'elles suivant une courbe, puisqu'elle est la limite d'une réunion de zones respectivement empruntées à ces diverses surfaces.

La courbe d'intersection de deux surfaces infᵗ voisines correspondant aux valeurs a et $a+da$ du paramètre est représentée par les deux équations :

$$\varphi(x, y, z, a) = 0$$

$$\varphi(x, y, z, a+da) = 0.$$

on peut encore remplacer l'une de ces équations par

$$\frac{d\varphi(x, y, z, a)}{da} = 0.$$

et p. c. la courbe d'intersection de deux surfaces infᵗ voisines est représentée par les deux équations :

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{d\varphi(x, y, z, a)}{da} = 0$$

La surface enveloppe s'obtiendra en éliminant a entre ces deux équations. —

On peut démontrer analytiquement que la surface dont l'éq. résulte de l'élimination de a entre les équations (1) et (2) est tangente à toutes

les surfaces proposées.

Pour une valeur donnée à a, les eq. (1) et (2) representent une courbe appartenant à la surface

$$\varphi(x,y,z,a)=0$$

Je dis que le plan tangent en un point de cette courbe est le même pour la surface (1) et pour la surface dont l'equation resulte de l'elimination de a entre (1) et (2). Concevons en effet que l'on deduise de (2) l'expression de a en fonction de x, y, z et qu'on la porte dans (1); l'elimination sera faite. Pour obtenir les coefficients de l'equation du plan tangent il faudra differentier successivement l'eq. obtenue par rapport à x et par rapport à y et l'on aura:

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d\varphi}{da}\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d\varphi}{da}\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)=0$$

Or on a pour le point considéré

$$\frac{d\varphi}{da}=0$$

Les eq. précédentes se reduisent donc à:

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy}=0$$

qui sont précisément celles qu'on aurait à ecrire pour calculer les coefficients du plan tangent à la

Surface (1) dans laquelle $\underline{a}$ est considérée comme une constante de valeur numérique égale pour ce point à la fonction de x, y, z qui la remplace pour former l'éq. de l'enveloppe. —

On peut encore chercher l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

a, et b désignant deux constantes arbitraires.

Il faut pour obtenir l'équation d'une pareille enveloppe éliminer a et b entre les trois équations

$$(1) \quad F(x, y, z, a, b) = 0$$

$$(2) \quad \frac{dF}{da} = 0$$

$$(3) \quad \frac{dF}{db} = 0$$

La surface représentée par l'équation résultante touchera toutes les surfaces proposées; mais elle ne touchera chacune qu'en un point, tandis que dans le cas précédent, chaque enveloppée avait avec l'enveloppe une courbe de contact. Il est clair en effet que pour des valeurs données des constantes a et b, les 3 équations (1) (2) (3) n'ont qu'une solution, et le point représenté par les valeurs de $x\ y\ z$ qui y satisfont est à la fois sur l'enveloppée et sur la surface mobile. Or je dis qu'en ce point les deux surfaces ont même plan tangent.

La première en effet a pour equation

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

L'éq. de la seconde en diffère parceque a et b au lieu d'y représenter des constantes, doivent être remplacés par leurs valeurs en x y z déduites de (2) et (3).
Mais pour calculer $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ au moyen de cette equation, on aura les resultats :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dx} + \frac{db}{dz}\frac{dz}{dx}\right)$$

qui à cause de (2) et (3) se réduit à :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

Cette eq. est précisément la même que celle que donnerait la dérivée par rapport à x de l'équation de la surface (1) dans laquelle a et b sont considérées comme des constantes ; par suite la valeur de $\frac{dz}{dx}$ est la même au point considéré pour la surface enveloppe et pour celle des surfaces enveloppées qui y passe ; il en est de même des valeurs de $\frac{dz}{dy}$, et les deux surfaces ont par suite le même plan tangent.

Cherchons les enveloppes des différentes positions d'un plan. Soit

$$(1) \qquad z = x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + F(\alpha)$$

l'équation du plan mobile; équation qui ne doit contenir qu'un seul paramètre. D'après la théorie, il faut éliminer α entre l'éq. (1) et sa dérivée par rapport à α qui est

$$(2) \qquad 0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + F'(\alpha)$$

L'élimination de α entre les équat. (1) et (2) donnent l'équation de la surface. ~~La cette~~ surface a pour génératrice une ligne droite ~~le long de la~~ qui a pour équation les équat. (1) et (2), et le long de laquelle la surface est touchée par le plan.

Ces droites ont elles-mêmes une enveloppe et sont toutes tangentes à une même courbe.

En général des droites qui se déplacent d'une manière quelconque dans l'espace n'ont pas d'enveloppe. Considérons par exemple les équations

$$(3) \qquad x = z\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha)$$

$$(4) \qquad y = z\psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)$$

les fonctions φ_1 φ_2 ψ_1 ψ_2 étant tout à fait arbitraires

Pour avoir l'enveloppe de droite représentée par les eq. (3) et (4), il faut éliminer α entre ces équations et leur dérivée par rapport à α

$$0 = z\varphi_1'(\alpha) + \varphi_2'(\alpha)$$

$$0 = z\psi_1'(\alpha) + \psi_2'(\alpha)$$

il est évident que si l'on élimine (α) entre ces deux équations et les deux précédentes il restera trois équations entre x, y, z qui ne détermineront pas de courbe. On voit donc que la méthode des enveloppes appliquée à une droite qui se déplace dans l'espace d'une manière quelconque ne donne rien. Si ici représentons les équations (1) et (2)

$$(1) \quad z = x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + F(\alpha)$$

$$(2) \quad 0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + F'(\alpha)$$

Si nous prenons les dérivées de ces deux équations nous avons

$$0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + F'(\alpha)$$

$$0 = x\varphi''(\alpha) + y\psi''(\alpha) + F''(\alpha)$$

Ici les quatre équations se réduisent à trois ; l'élimination de α entre ces trois équations donnera deux équations qui détermineront la courbe enveloppe des droites.

Ceci s'applique du reste à une surface mobile quelconque

soit (1) $F(x,y,z,a)=0$

l'équation d'une surface mobile. La surface enveloppe s'obtiendra en éliminant α entre les équation et

$$(2).\quad \frac{dF}{da}=0$$

L'ensemble des eq. (1) et (2) représente la courbe génératrice de la surface enveloppe. Si nous voulons chercher l'enveloppe de cette génératrice il faudra éliminer α entre les deux équations et leurs dérivées par rapport à α; lesquelles sont:

$$\frac{dF}{da}=0$$

$$\frac{d^2F}{da^2}=0$$

Les 4 équations se réduisent encore à trois; l'élimination de α entre les trois équations donnera deux équations lesquelles représentent la courbe enveloppe de la courbe génératrice.

Chercher la surface enveloppe d'une sphère mobile dont le rayon de cette sphère est constant et son centre se meut sur une certaine ligne.

L'équation de cette sphère sera de la forme

$$(x-\varphi(\alpha))^2+(y-\psi(\alpha))^2+(z-\alpha)^2=a^2$$

Nous aurons l'enveloppe en éliminant α entre cette équation et sa dérivée par rapport à α qui est :

$$(x-\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)+(y-\psi(\alpha))\psi'(\alpha)+z-\alpha=0$$

L'ensemble de ces deux éq. détermine pour chaque valeur de α la courbe de contact de la sphère avec la surface Canal ; cette courbe est plane ; elle est donc un cercle ; et il est évident que c'est un grand cercle, car le plan (2) passe par le centre de la sphère.

La surface est donc le lieu des positions d'un grand cercle qui doit être normal à la courbe décrite par le centre.

Courbe à double courbure

En chaque point d'une courbe à double courbure on peut mener une tangente dont la distance à un point infᵗ voisin du point de contact et situé sur la même courbe est infᵗ petite du second ordre. — Il résulte de là que la plus courte distance de deux tangentes infᵗ voisines est un infᵗ petit du second ordre au moins. Nous allons prouver qu'elle est du 3ᵉ ordre.

Soient généralement les éq. d'une droite

$$x = az + p$$
$$y = bz + q.$$

les equations d'une droite mobile suivant une loi qcq, a, b, p, q etant des fonctions d'un même parametre t. la droite voisine aura pour equations :

$$x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p$$
$$y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q.$$

et la distance des deux droites est

$$\delta = \frac{\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p}{\sqrt{}}$$

Le dénominateur est évid. un infᵗ petit du 1ᵉʳ ordre

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2a + \frac{1}{6} d^3a + \ldots$$
$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2b + \frac{1}{6} d^3b + \ldots$$
$$\Delta p = dp + \frac{1}{2} d^2p + \frac{1}{6} d^3p + \ldots$$
$$\Delta q = dq + \frac{1}{2} d^2q + \frac{1}{6} d^3q + \ldots$$

$$\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p = (da\,dq - db\,dp) + \frac{1}{2}(da\,d^2q + dq\,d^2a - db\,d^2p - dp\,d^2b) + \ldots$$

Si $da\,dq - db\,dp$ n'est pas nul, le numérateur de δ est infᵗ petit du second ordre. Si ces 1ᵉʳ terme est une somme nulle, les quatre suivants qui sont du 3ᵉ ordre, donnent aussi une somme nulle; car ils forment la différentielle des deux 1ᵉʳˢ. Il ne restera donc que des termes du 4ᵉ ordre au moins; et par suite δ est au moins du 3ᵉ ordre. —

— Plan osculateur —

Il résulte du th. précédent que si par une tgte en un point M on mène un plan parallèle à la tangente en un point voisin M', la perpend. abaissée du point M' sur ce plan est du 3ᵉ ordre.

On peut démontrer que par un point d'une courbe, il passe toujours un plan et un seul dont la distance aux points voisins de la courbe soit un infᵗ petit du 3ᵉ ordre. Ce plan se nomme *plan osculateur*

Si $Ax + By + z + D = 0$

est l'éq. du plan, A, B, D étant supposés des quantités finies, la distance de ce plan à un point x, y, z, est

$$\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

et p.c.s. du même ordre que $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Cela posé soient

$$f(x, y, z) = 0$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

les équations d'une courbe, et x y z les coord. de l'un de ses points. En nommant t u v les coord. courantes des points du plan osculateur, l'éq. de ce plan sera de la forme

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0$$

Si $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ sont les coord. d'un point de la courbe voisin du point considéré la distance de ce point au plan sera de même ordre de grandeur que

$$(1) \qquad A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z \quad . \quad . \quad .$$

Mais on a :

$$\Delta x = dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{1}{6}d^3x -$$
$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y +$$
$$\Delta z = dz + \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{6}d^3z +$$

Dans ces formules x, y, z sont considérés comme fonction d'une quatrième variable entièrement arbitraire. Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression (1) et qu'on égale à zéro les termes inf. petits du 1er et du 2e ordre on aura :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

On déduit de ces équations :

$$\frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Par suite on peut prendre pour éq. du plan osculateur

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(t-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(u-y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(v-z) = 0$$

Le plan osculateur se présente quelquefois en géométrie comme limite du plan qui passe par 3 points infiniment voisins.

Soient $x\ y\ z$ les coord. d'un point ;

$x+\Delta x \quad y+\Delta y \quad z+\Delta z$ celles d'un point voisin obtenu en donnant à la variable t un accroissement Δt

$x+2\Delta x+\Delta^2 x,\ y+2\Delta y+\Delta^2 y,\ z+2\Delta z+\Delta^2 z$, celles d'un 3e point voisin des deux premiers et obtenu en donnant de nouveau à la variable indépendante t un accroissement égal au précédent. Un plan qui passe par le point $x\ y\ z$ a une éq. de la forme

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0$$

et pour qu'il passe par les deux points considérés il faut qu'on ait :

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z = 0$$
$$A\,\Delta^2 x + B\,\Delta^2 y + C\,\Delta^2 z = 0$$

Par suite on a

$$\frac{A}{\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y} = \frac{B}{\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z} = \frac{C}{\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x}$$

et si Δt devient infiniment petit, on voit que ces coeff. ne diffèrent pas des précédents.

On peut encore considérer le plan osculateur comme limite du plan mené par une tgte parallèlement à la tgte voisine. Nous allons prouver que le plan ainsi défini a la même limite.

Soient $t-x = \frac{dx}{dz}(v-z)$

$u-y = \frac{dy}{dz}(v-z)$

les équations d'une tgte. Le plan qui passe par cette tangente a une éq. de la forme :

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0$$

A B C devant satisfaire à la relation

$$A\frac{dx}{dz} + B\frac{dy}{dz} + C = 0.$$

c. à d. $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$

Pour exprimer que le même plan est parallèle à la tgte infᵗ voisine il suffit de remplacer dx dy dz par $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$ qui sont les valeurs que prennent les différentielles pour le point infᵗ voisin ; et on aura pour seconde relation entre A, B, C

$$A(dx + d^2x) + B(dy + d^2y) + C(dz + d^2z) = 0$$

qui combinée avec la précédente donnera les valeurs déjà obtenues pour les coefficients de l'éq. du plan osculateur.

Nous terminerons ce que nous avons à dire du plan osculateur par qq remarques géométriques sur la situation de ce plan.

Le plan osculateur d'une courbe en un point M contient la tangente MT en ce point et est parallèle à la tangente infᵗ voisine. Cela veut dire que ce plan est la limite de ceux qui passant par MT, seraient rigoureusement parallèles a des tangentes de plus en plus voisines. Si donc on considère deux points M et M' d'une courbe à double courbure et leurs tangentes MT, M'T', le plan conduit par MT parallèlement à M'T' fera un angle infᵗ petit avec le plan osculateur P; mais ce plan a tous ses points à la même distance de M'T', cette distance est égale à la plus courte distance des deux tangentes; et par suite elle est infᵗ petite du 3ᵉ ordre —

Si maintenant on fait tourner le plan P, autour de MT pour le faire coincider avec le plan P, l'angle de cette rotation ~~avec le plan~~ sera infᵗ petit, et par suite les points infᵗ voisins de la charnière se déplaceront d'une infᵗ petit du 1ᵉʳ ordre, ensuite que les points de la tangente M'T' sont menés à une distance infᵗ petite du 2ᵉ ordre du plan osculateur. —

il résulte de là que le plan osculateur touche tout le long de MT la surface lieu des tgtes à la courbe donnée —

Soit en effet sur cette surface, RR' une courbe qcq qui coupe les deux tangentes à une

distance finie des points M et M'. Je dis que le plan osculateur contient la tangente à cette courbe.

En effet le plan passe par le point B et sa distance au point B' est infᵗ petite du 2ᵉ ordre. Par suite la droite BB' a la même limite que celle qui joint le point B à la projection de B' sur le plan osculateur, et cette limite, c.à.d. la tangente à BB' est par suite située dans le plan osculateur. On peut donc dire que la surface lieu des tangentes à une courbe non plane est l'enveloppe des plans osculateurs de cette courbe. Les tangentes sont d'après cela les intersections de deux plans osculateurs voisins. —

On peut remarquer que le plan osculateur en un point M fait un angle infᵗ petit du second ordre avec la tangente en un point voisin M'. Il est clair en effet d'après ce qui précède que les points de la tgte en M' situés à une distance finie de M' sont à une distance infᵗ petite du second ordre du plan osculateur; or l'angle infᵗ petit d'une droite et d'un plan est mesuré par la perpend. abaissée sur le plan par le point situé sur la droite à une distance de leur intersection égale à l'unité; cet angle est donc dans le cas actuel infᵗ petit du 2ᵉ ordre

107 v

Courbure des lignes non planes.

Le cercle osculateur d'une courbe plane est un cercle qui passant par un point de cette courbe est, dans le voisinage de ce point à une distance infᵗ petite du 3ᵉ ordre de la courbe considérée. Un pareil cercle existe également pour les courbes à double courbure. Concevons en effet qu'on projette une pareille courbe sur son plan osculateur en M. Les points infᵗ voisins de M seront à une distance infᵗ petite du 3ᵉ ordre de leur projection. et par suite le cercle osculateur de la projection étant dans le voisinage de M à une distance infᵗ petite du 3ᵉ ordre de cette projection sera aussi à une distance du 3ᵉ ordre de la courbe dans l'espace.

Une courbe qcq a donc un cercle osculateur qui est le même que celui de la projection de cette courbe sur son plan osculateur.

On nomme courbure d'un arc de courbe non plane l'angle de ses tangentes extrêmes, et courbure en un point le rapport de l'angle de deux tangentes infᵗ voisines à la longueur de l'arc qui sépare leurs points de contact. Ces définitions sont identiques à celles qui ont été données

Pour les courbes planes ; on peut en conclure que pour une courbe qcq, la courbure en chaque point est la même que celle de son cercle osculateur. Pour le démontrer il suffit de prouver que la courbure d'une courbe en un point est égale à celle de la projection de cette courbe sur le plan osculateur en ce point. Soit en effet M un point d'une courbe qcq et MT la tgte en ce point. M' un point voisin de M pour lequel la tgte est $M'T'$, si l'on projette la courbe donnée sur son plan osculateur en M, MT et la projection de $M'T'$ seront deux tangentes à la courbe projection et les deux points de contact de ces tangentes seront M et la projection M_1 de M' sur le plan osculateur. Or d'une part la tangente en M' et sa projection sur le plan osculateur font un angle infᵗ petit du second ordre et peuvent être regardés p.c.s. comme faisant des angles égaux avec la tgte MT. De plus l'arc MM' que l'on peut remplacer par sa corde ne diffère de la corde et par suite de l'arc MM_1 que d'un infᵗ petit du 3e ordre. On peut donc regarder les deux termes de la fraction qui exprime la courbure de MM' comme égaux à ceux de la fraction qui exprime la courbure de MM_1. Les

Deux courbes est d'une même courbure et cette courbure commune est celle du cercle osculateur de la courbe plane MM_1 qui est aussi, comme on l'a vu, celui de la courbe proposée.

Ce que précède permet de calculer la courbure et par suite le rayon de courbure d'une courbe définie par deux équations.

Cette courbure est par définition le rapport de l'angle formé par deux tangentes voisines à l'arc qui sépare les points de contact de ces tangentes.

Calculons d'abord l'angle de deux tg^tes inf^t voisines qu'on nomme angle de contingence.

Soient $x\ y\ z$ les coord. d'un point M.

$x+dx \quad y+dy \quad z+dz$ celles d'un point voisin M'. Les cosinus des angles formés par la tangente en M avec les axes sont

$$\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds}$$

et les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par la tangente en M' sont de même

$$\frac{dx}{ds}+d\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds}+d\frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds}+d\frac{dz}{dz}$$

Pour calculer l'angle formé par ces tangentes

Conceva que l'on mène par l'origine des parallèles à chacune d'elles, et que sur chacune de ces droites on porte une longueur égale à l'unité. Les extrémités de ces deux parallèles auront pour coord.

$$\frac{dx}{ds} \qquad \frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}$$

la distance de ces deux points servira de mesure à l'angle de contingence cherché ε. On aura donc:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

La courbure cherchée étant $\frac{\varepsilon}{ds}$ on a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}{ds^2}$$

Si l'on prend l'arc s pour variable indep. on a:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

formule analogue à celle qui a été trouvée pour les courbes planes.

109 v

Si l'on veut garder une variable indépᵗᵉ. indéterminée on aura

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}$$

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2}$$

$$d\frac{dz}{ds} = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2}$$

et par suite :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(d^2x\,ds - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)}{ds^6}$$

En developpant cette formule devient :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{ds^2\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) - 2\,ds\,d^2s\left(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z\right) + (d^2s)^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)}{ds^6}$$

Or on a :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s$$

D'après cela l'expression de $\frac{1}{\rho^2}$ devient

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) - 2\left(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z\right)^2 + \left(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z\right)^2}{ds^6}$$

Ce qui se réduit à.

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2}{ds^6}.$$

Ce sera l'expression la plus commode à employer lorsque x y z sont donnés en fonction d'une quantité variable —

On peut encore écrire :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) + ds^2 d^2s^2 - 2 d^2s^2 ds^2}{ds^6}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2 - d^2s^2}{ds^4}$$

—

On désigne sous le nom de Normale principale d'une courbe la normale située dans le plan osculateur. Cette normale passe par le centre du cercle osculateur, et en portant sur elle une longueur égale au rayon de ce cercle on obtient une ligne déterminée de grandeur et de direction et qu'on désigne souvent sous le nom de rayon de courbure de la courbe proposée. La direction de cette normale principale ou de ce rayon de courbure est facile à déterminer.

Reprenons la ~~question~~ construction qui nous a permis de calculer l'angle de contingence. Par l'origine des coordonnées menons deux parallèles aux droites qui touchent la courbe proposée aux points infᵗ voisins M et M', portons sur ces parallèles deux longueurs

égale à l'unité OI, OI'. Je dis que la droite II' dont la longueur représente l'angle de contingence coïncide en direction avec la normale principale. En effet le triangle OII' étant isocèle et l'angle O étant infᵗ petit, les angles à la base diffèrent infᵗ peu d'un droit ; en sorte que la droite II' est à la limite perpend. à OI, et par suite parallèle à une normale de la courbe proposée au point M. De plus cette ligne II' est dans le plan OII' parallèle aux deux tangentes infᵗ voisines et, par suite, elle est, à la limite, dans le plan osculateur. Elle coïncide donc en direction avec la normale principale.

Les extrémités de la droite II' ayant pour coordonnées

$$\frac{dx}{ds} \qquad \frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds} \qquad \frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}$$

Les cosinus des angles α β γ formés par cette droite avec les axes sont :

$$\cos\alpha = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\sqrt{}}$$

$$\cos\gamma = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\sqrt{}}$$

Le denominateur de ces trois cosinus est precisement l'angle de contingence ε lequel est egal a $\frac{ds}{\rho}$. en le remplacant par cette valeur on a:

$$\cos\alpha = \rho\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = \rho\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\cos\beta = \rho\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$\cos\gamma = \rho\,\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = \rho\,\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Si l'on ne veut pas prendre s pour variable independante on aura

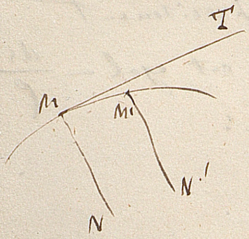
$$\cos\alpha = \rho\,\frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^3}$$

et de meme pour les autres – ds et d^2s seront ensuite remplacés dans cette formule par leur valeurs:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

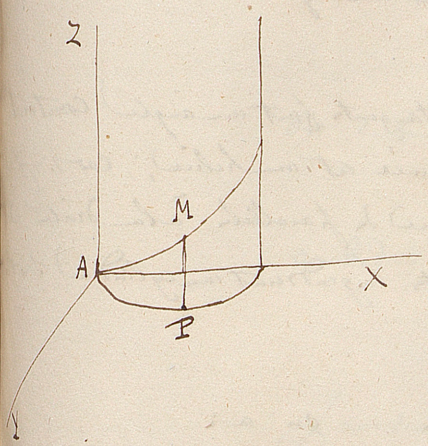
$$d^2s = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds}.$$

En chaque point d'une courbe non plane, il existe une normale principale qui passe par le centre de courbure. Une différence importante entre les courbes non planes et les courbes planes consiste en ce que les normales principales ne sont pas pour les premières tangentes à la courbe lieu des centres de courbure. On peut même ajouter que les normales principales ne sont jamais tangentes à une même courbe, en d'autres termes les normales principales ne forment jamais une surface développable. Pour le démontrer remarquons que la surface lieu des normales principales a pour plan tangent en un point de cette courbe le plan osculateur même de la courbe. Soit en effet M un point qcq d'une courbe, MN la normale principale en M et MT la tgte. Le plan tangent à la surface lieu des ~~points~~ positions de MN contient évid. la ligne MN et il contient aussi MT, puisque la courbe MM' est située sur la surface.



D'après cela, si la surface lieu des positions de MN était développable, le plan osculateur de la courbe MM' lui serait tangent tout le long des génératrices successives et cette surface serait l'enveloppe des plans osculateurs à la courbe MM'. Mais on a vu que l'enveloppe des plans osculateurs à la courbe MM' est la surface lieu des tangentes à cette courbe et il y a par suite contradiction à admettre que la surface lieu des normales principales soit développable. —

Application des théories précédentes
— à l'hélice. —



Nous supposerons l'hélice tracée sur un cylindre quelconque; nous prendrons pour axe des z une génératrice ~~perpend. à~~ du cylindre et désignons par s l'arc AP de la section droite du cylindre compté à partir du point A —

Si nous prenons un point M de la courbe on sait qu'on a la relation

$$\frac{MP}{AP} = \text{Constante}$$

On pourra prendre les premières eq. de la courbe les eq. suivantes.

(1) $x = \varphi(s)$

(2) $y = \psi(s)$

(3) $z = ns$

Car il est clair que x et y sont une certaine fonction de l'arc s; les fonctions φ et ψ ne sont pas quelconques

Car on a $\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$

et par suite les fonctions φ et ψ doivent satisfaire à la relation

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1.$$

La courbe étant ainsi définie par les équations (1). (2). (3) cherchons la tangente à la courbe.

112v

les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s) \qquad \frac{dy}{ds} = \psi'(s) \qquad \frac{dz}{dz} = m.$$

Donc la tangente à l'helice fait un angle constant avec la generatrice du cylindre.

Toute les courbes dont la tangente fait un angle constant avec une droite de direction donnée est une helice; car si par les points de l'helice on mene des paralleles à la droite de direction donnée, ces droites engendreront un cylindre sur lequel sera tracée l'helice.

Plan osculateur. — on a:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \varphi''(s) \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \psi''(s) \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Le plan osculateur dont l'equation general est

$$(t-x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (u-y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (v-z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$

a, dans le cas actuel, pour equation

$$-m\psi''(s)(t-x) + m\varphi''(s)(u-y) + (\varphi'(s)\psi''(s) - \varphi''(s)\psi'(s)) = $$

après avoir supprimé ds^3 qui était facteur commun.

Ce plan contient la normale au cylindre au point M, laquelle est parallele à la normale à la base du cylindre menée par le point P.

Pour le prouver je cherche la trace du plan osculateur sur le plan xoy; le coefficient angulaire de cette trace est $-\dfrac{\psi''(s)}{\varphi''(s)}$.

Il en résulte que la trace, sur le plan xy, du plan osculateur en M est parallèle à la normale à la base menée au point P. En effet le coefficient angulaire de la normale à la base en P est

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varphi'(s)}{\psi'(s)}.$$

Or de la relation

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1$$

on déduit par la différentiation

$$-\frac{\psi''(s)}{\varphi''(s)} = \frac{\varphi'(s)}{\psi'(s)}$$

Par suite la normale à la surface en M est bien contenue dans le plan osculateur.

Grandeur du rayon de courbure. On a :

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds_1^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds_1^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{ds_1^2}\right)^2$$

s_1 étant l'arc d'hélice. (On se rappelle que s est l'arc de la base). Mais le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ = constante. En effet :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 =$$

$$ds_1^2 = [\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2] ds^2 + n^2 ds^2$$

$$ds_1^2 = (1 + n^2) ds^2$$

Il en résulte que d^2x, d^2y, d^2z calculés dans l'hypothèse où ds est constant, peuvent être considérés comme calculés dans l'hypothèse où ds_1 est constant; il suffira de les multiplier par le rapport

113v

Constant $\frac{ds}{ds_1}$. On a par suite

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi''(s)^2 + \psi''(s)^2}{m^2+1}$$

Si R désigne le rayon de courbure de la section droite en P on a

$$\varphi''(s)^2 + \psi''(s)^2 = \frac{1}{R^2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2(1+m^2)}.$$

Si l'hélice est tracée sur un cylindre circulaire, son rayon de courbure est constant. —

Le rayon de seconde courbure est dans un rapport constant avec le rayon de 1re courbure.

Réciproquement si le rayon de 1re courbure et celui de 2e courbure est un rapport constant, cette courbe est une hélice. —

---

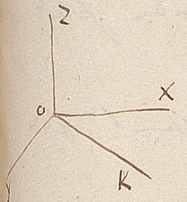
114 r

Sections planes d'une surface courbe.

Considérons une surface courbe quelconque et choisissons pour axe des z la normale OZ en un point O de cette surface, et deux droites perpend. l'une à l'autre, menées par le point O dans le plan tangent pour axe des x et pour axe des y. Soit

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation de cette surface rapportée à ces trois axes. On aura d'après nos hypothèses z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ se réduisant à zéro quand on supposera x et y nuls. Nous allons chercher la loi suivant laquelle varie la courbure en O des sections faites dans la surface par les plans conduits suivant OZ lesquels sont tous normaux à la surface. Il est bien remarquable qu'en exceptant quelques points singuliers cette loi se trouve la même pour toutes les surfaces continues.



Soit $y = mx$

l'éq. du plan secant considéré. L'intersection de ce plan avec la surface se projette sur le plan des zx suivant une courbe dont l'équation est

$$z = \varphi(x, mx).$$

Pour obtenir l'éq. de cette courbe dans son plan rapportée aux deux axes rectangulaires OZ et OK.

114v

et désignant par z_1 et x_1 les coord. d'un point en axes coord.

$$z_1 = z \qquad x_1 \cos(OK, OX) = x.$$

mais la tangente de l'angle KOX étant égale à m, le cosinus de cet angle est

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

et par suite l'équation de la courbe dans son plan est :

$$z_1 = \varphi\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{mx_1}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

il est facile de déduire de cette eq. le rayon de courbure de la courbe en O. Le rayon est donné par la formule :

$$R = \frac{\left(1+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z_1}{dx_1^2}}$$

dans laquelle on devra supposer $x_1 = 0$ et $\frac{dz_1}{dx_1} = 0$ comme cela résulte évid. de ce que la courbe passe par l'origine et est tangente à l'axe des X.

Pour calculer $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$ différentions une 1re fois l'équation

$$z_1 = \varphi(x, y)$$

en nous rappelant que :

$$\frac{x_1}{\sqrt{1+m^2}} = x \qquad \frac{mx_1}{\sqrt{1+m^2}} = y.$$

on aura :

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{dz}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{dz}{dy}\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Différentiant une seconde fois par rapport à x, il vient:

$$\frac{d^2z_1}{dx_1^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{1}{1+m^2} + \frac{2m}{1+m^2}\,\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2}\,\frac{m^2}{1+m^2}.$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^2z}{dy^2}$ $\frac{d^2z}{dx^2}$ ont à l'origine des coord. des valeurs numériques déterminées qu'on obtiendra en faisant $x=0$ $y=0$ dans leur expression générale. Soient A B C les trois valeurs. En les introduisant dans celle de $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$ et substituant la valeur trouvée dans l'expression de R, ainsi que la valeur de $\frac{dz_1}{dx_1}$ qui est zero, on aura

$$R = \frac{1+m^2}{A + 2Bm + Cm^2}.$$

Si l'on introduit au lieu de m l'angle φ défini par l'équation

$$tg\,\varphi = m$$

l'expression de R devient

$$R = \frac{1}{A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi}.$$

et la courbure $\frac{1}{R}$ a pour expression

$$\frac{1}{R} = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi.$$

Quand φ vient à varier, ce trinome est susceptible d'un maximum et d'un minimum. Si en effet on égale à zéro la dérivée prise par rapport à φ, on a:

$$-2A\sin\varphi\cos\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2C\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$(C-A)\sin 2\varphi + 2B\cos 2\varphi = 0$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A-C}$$

et par suite les valeurs de φ qui rendent la courbure de la section maxima ou minima correspondent à deux directions perpend. l'une à l'autre.

Si l'on prend la seconde dérivée de $\frac{1}{R}$ par rapport à φ on trouve

$$2(C-A)\cos 2\varphi - 4B\sin 2\varphi \pm \&c$$

Si l'on y remplace successivement 2φ par les valeurs α et $\alpha+\pi$ qui annullent la 1re dérivée, on obtient deux résultats égaux et de signes contraires ; par suite l'une des valeurs de φ correspond à un maximum, l'autre à un minimum.

Il résulte du calcul précédent que parmi les sections normales faites en un point donné d'une surface, il en existe deux, perpend. l'une à l'autre et dont la courbure est maxima ou minima. On peut aussi admettre que les plans de ces deux sections dont l'existence est démontrée aient été pris pour plans de ZX et de ZY. dans ce cas les valeurs maxima et minima de la ~~surface~~ courbure devront

correspondre à

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

et l'on aura par suite pour l'une et pour l'autre

$$tg\, 2\varphi = 0$$

Donc B doit être nul ; et l'expression générale de la courbure devient:

$$\frac{1}{R} = A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi.$$

Pour avoir la courbure maxima et la courbure minima $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ on fera successivement

$$\varphi = 0 \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

ce qui donne

$$\frac{1}{R_1} = A \qquad \frac{1}{R_2} = C.$$

et l'on peut mettre l'expression de la courbure sous la forme:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

De cette éq. on déduit un th. remarquable. Si l'on considère deux section normales perpend. l'une à l'autre, on obtiendra leurs courbures $\frac{1}{R'}$ $\frac{1}{R''}$ au point O en faisant successivement dans l'équation précédente

$\varphi = \alpha \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, ce qui donnera.

116v

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha$$

donc $$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

c. a d. que la somme des courbures de deux sections perpend. l'une à l'autre est constante et égale à la somme des courbures maxima et minima.

Courbure d'une section oblique

Considérons actuellement une section oblique de la surface et cherchons à exprimer le rayon de courbure en un point. Prenons toujours pour axe des Z la normale à la surface en ce point et supposons l'axe des X dirigé suivant la droite d'intersection du plan tangent et de la section considérée. Cette section passant alors par l'axe des x aura pour eq.

$$z = my \;;$$

L'equation de la surface étant toujours

$$z = \varphi(x,y)$$

la projection de la courbe considérée sur le plan XOY sera

$$my = \varphi(x,y)$$

Pour avoir l'eq. de la courbe dans son plan, prenons

Pour axes la ligne OX et l'intersection OK du plan secant avec le plan ZY.

On aura en designant par x_1 z_1 les coord. relatives à ces axes

$$x_1 = x$$

$$z_1 \cos ZOK = z.$$

$$z_1 \sin ZOK = y.$$

L'equation de la surface donne alors en posant $ZOK = \varphi$

$$z_1 \cos\varphi = \varphi(x_1, z_1 \sin\varphi)$$

L'expression du rayon de courbure etant

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z_1}{dx_1^2}}$$

Pour l'obtenir differentions l'equation precedente par rapport à x_1, en supposant que $z_1 \sin\varphi = y$.

il viendra :

$$\frac{dz_1}{dx_1}\cos\varphi = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\sin\varphi\frac{dz_1}{dx_1}$$

Si nous differentions une 2e fois cette equation nous pourrons en deduire la valeur de $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$. Mais le calcul est susceptible d'une simplification. remarquons en effet que le dernier terme du 2e membre contient deux facteurs qui s'annullent pour le point considéré, savoir $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{dz_1}{dx_1}$

or pour prendre la dérivée de ce produit on ne devra différentier qu'un seul facteur à la fois, et les deux termes qui composent cette dérivée seront p. ex. nuls quand on y fera $x_1 = 0$; il est donc inutile d'écrire les termes qui proviennent de cette dérivée, et l'on a pour le point particulier qui nous occupe

$$\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} \cos\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} \sin\varphi \frac{dz_1}{dx_1}$$

or $\frac{dz_1}{dx_1}$ est nul, puisque la courbe est tangente à l'axe des x; il reste donc pour le point O

$$\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} \cos\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

la valeur de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ se rapportant à l'hypothèse $x=0$ $y=0$

en portant ce résultat dans l'expression de R et remarquant de nouveau que $\frac{dz_1}{dx_1}$ est nul, il vient

$$R = \frac{\cos\varphi}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}$$

$\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ a pour le point O une valeur numérique indépendante de φ; si nous la désignons par A, nous aurons

$$R = \frac{\cos\varphi}{A}$$

Si l'on fait $\varphi = 0$, cette formule représentera le rayon de courbure de la section normale conduite suivant OX, et l'on aura

$$\rho = \frac{1}{A}$$

La comparaison des formules donne

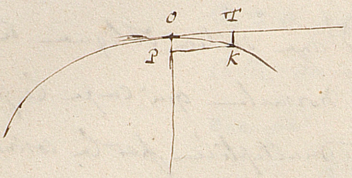
$$R = \rho \cos \varphi.$$

P.c. le rayon de courbure d'une section oblique est égal au rayon de courbure de la section normale qui coupe le plan tangent suivant la même droite multiplié par le cosinus de l'angle formé par les plans des deux sections.

Nous pouvons déduire de ce qui précède l'expression du rayon de courbure d'une courbe qcq tracée sur une surface. Si cette ~~surface~~ courbe est plane la question rentre dans celle que nous avons examinée; si la courbe n'est pas plane on fera usage du théorème suivant:

Le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface est égal au rayon de courbure de la section faite dans la surface par le plan osculateur de la courbe au point considéré. Soit en effet AOB la courbe à double courbure tracée sur la surface, A'OB' l'intersection de la surface par le plan osculateur ~~au point O~~ de cette courbe au point O. La distance de la courbe AOB à son plan osculateur est, dans le voisinage du point O, un inf^t petit du 3e ordre. P.c. les deux courbes AOB, A'OB' sont, dans le voisinage du point O, à une distance inf^t petite du 3e l'une de l'autre; et par suite le cercle osculateur de ces deux courbes est le même en sorte qu'elles ont même rayon de courbure. —

Toutes les propriétés des courbes peuvent être démontrées géométriquement



Soit une courbe qcq et la tgte en O; soit K un point infᵗ voisin de O; je dis que la courbure est égale à la limite du rapport

$$\frac{2IK}{\overline{OI}^2}.$$

En effet, si dans le voisinage du point O, on assimile la courbe à un cercle, on aura: R

$$\overline{KP}^2 = OP\,(2R - OP).$$

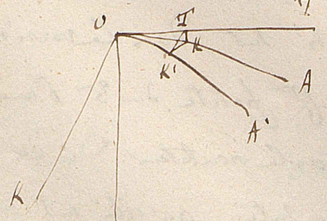
d'où

$$\frac{OP}{\overline{KP}^2} = \frac{1}{2R - OP}.$$

On voit que la limite du rapport $\frac{OP}{\overline{KP}^2}$ est égale à la moitié de la courbure. Cela revient, comme on voit, à assimiler la courbe à son cercle osculateur dans le voisinage du point O.

Ceci nous donne le moyen de comparer les courbures de deux sections tangentes en un même point.

Considérons une surface qcq et une tangente en un point O de cette surface; soit ON la normale — je coupe la surface par le plan normal NOT ce qui me donne la section OA; je coupe la surface par un plan oblique KOT, ce qui me donne la courbe OA' — par le pᵗ I infᵗ voisin de O, je mène un plan perpend. à OT qui coupe les sections en K et K'. —



on aura $$\frac{\left(\frac{1}{\rho_n}\right)}{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)} = \frac{IK}{IK'}$$

[illegible]s I'K parallèle à la normale en G
[illegible]t voisin à la normale en
à la surface, tandis que
[illegible]'est à la limite une
[illegible]t à cette surface.

L'angle IKK' diffère infiniment peu d'un droit; en designant par γ l'angle I'IK, on aura à la limite

$$\frac{IK}{IK'} = \cos\gamma \quad \text{et par suite}$$

$$\rho_0 = \rho_n \cos\gamma.$$

Les autres théorèmes se déduisent très facilement de la considération d'une courbe nommée indicatrice par M. Dupin.

Considérons en un point M d'une surface le plan tangent à cette surface; l'indicatrice est la section faite dans la surface par un plan parallèle à ce plan tangent et qui en est situé à une distance infiniment petite, ~~on dit~~

Nous démontrerons d'abord le th. suivant. En un point qcq. d'une surface, l'indicatrice est une ~~surface~~ courbe du 2e degré.

Ce th. doit être entendu de la manière suivante: si le plan sécant se rapproche de plus en plus du plan tgt auquel il est parallèle, une courbe de dimension finie qui serait constamment semblable à la courbe d'intersection ou indicatrice s'approcherait de plus en plus d'être une section conique; et ceci encore n'a lieu que pour les points qui sont infiniment voisins de M

Pour le démontrer, prenons pour axe des z la normale à la surface au point considéré, et pour plan des xy le plan tangent en ce point.

Soit $$z = \varphi(x,y)$$

l'équation de la surface. Un plan parallèle au plan tangent aura pour équation

$$z = h$$

et l'indicatrice projetée en vraie grandeur sur le plan des xy aura pour équation

$$h = \varphi(x,y)$$

x et y étant inf^t petits pour tous les points de l'indicatrice. Si on développe le 2e membre par la f. de Mac Laurin on aura :

$$h = \varphi(0,0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\,xy + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{y^2}{2}\right)_0 + R$$

R étant inf^t petit par rapport aux termes qui précèdent.

D'ailleurs on a rigoureusement

$$\varphi(0,0) = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = 0$$

puisque la surface passe par l'origine des coord. et qu'elle est en ce point tangente au plan des xy. — L'éq de l'indicatrice se réduit donc à :

$$h = \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + xy\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 + R.$$

Soient x' y' les coord. d'un point appartenant à une courbe semblable ayant pour centre de similitude l'origine,

et k pour rapport de similitude, on aura

$$x' = kx \qquad y' = ky.$$

$$h = \frac{x'^2}{2k^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + \frac{x'y'}{k^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y'^2}{2k^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + R$$

ou

$$k^2 h = \frac{x'^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + \frac{x'y'}{1}\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y'^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + Rk^2.$$

Supposons que k^2 augmente en même temps que h diminue, de manière que k^2h ait une limite finie P; $x'y'z'$ auront alors des limites finies et k^2R tendra vers zero, puisque R est infᵗ petit par rapport aux termes que la multiplication par k^2 a rendus finis. On aura donc à la limite :

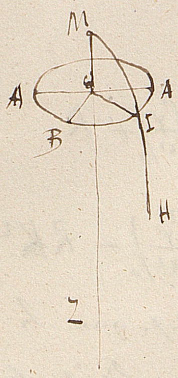
$$P = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2}.$$

et la courbe semblable à l'indicatrice est une courbe du 2ᵉ degré à centre ; le centre de cette courbe se projette à l'origine et par suite il est situé sur l'axe des z. —

Nous pouvons étudier actuellement la loi de variation de la courbure des ~~surfaces~~ sections normales en un point donné d'une surface.

Soit M le point, Mz la normale et ABA' l'indicatrice dont A et B sont les sommets. Menons par la normale Mz un plan qcq qui coupe la

surface suivant la courbe MIH ; le rayon de courbure de cette section sera donné par la formule



$$2R = \frac{\overline{IO}^2}{OM}.$$

Comme OM est le même pour toutes les sections, le rayon de courbure est proportionnel au carré du rayon de l'indicatrice qui sert de trace au plan de la section considérée. On voit de suite que les sections de plus grande et de moindre courbure ont pour traces les axes de l'indicatrice et sont perpendiculaires l'une à l'autre. De plus la relation qui lie le rayon de courbure d'une section qcq avec les rayons maxima et minima est la même que celle qui lie un diamètre d'une ellipse avec les deux axes de la courbe. Or on a :

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha \qquad \text{ou bien}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{R'}\sin^2\alpha.$$

Ce qui est la relation obtenue précédemment.

Si l'indicatrice est une hyperbole on peut dans l'équation qui la représente changer le + en − sans que la courbe cesse d'être réelle ; la surface peut donc être coupée par des plans parallèles à son plan tangent et situés au dessus et au dessous de ce plan, d'où l'on conclut qu'elle est traversée par son plan tangent et qu'elle est à courbures opposées. On remarquera que les indicatrices situées de

Cotés différents par rapport au plan tangent se projettent en vraie grandeur sur le plan des xy suivant des hyperboles qui ont les mêmes asymptotes mais qui sont situés dans des angles différents. Cela résulte de l'eq. même de l'indicatrice ; car lorsqu'on change, dans l'eq. d'une hyperbole rapportée à son centre le signe du terme indép. de x et y, les asymptotes conservent la même direction ; mais la courbe se transporte dans les angles adjacents à ceux qu'elle occupait primitivement. On verrait, en effet, en considérant la surface comme lieu des courbes suivant lesquelles elle est coupée par les plans normaux que les seules courbes dont la concavité est dans un certain sens seraient coupées en des points réels par le plan sécant situé au dessous du plan tangent, tandis que les autres le seraient par le plan sécant situé au dessus, de sorte qu'à une même section normale ne correspondront jamais deux points réels, ni deux points imaginaires dans les deux indicatrices.—

On peut remarquer que les deux indicatrices qui correspondent à des sections faites au dessus et au dessous du plan tangent sont suffisamment connues dès qu'on connaît l'une des deux. Car en les supposant faites à une même distance, ce qui revient à donner à h deux valeurs égales et de signes contraires, les deux courbes auront pour eq.

$$h = Ax^2 + Bxy + Cx^2$$
$$-h = Ax^2 + Bxy + Cx^2.$$

Si le point dont les coord. sont x et y est situé sur l'une celui dont les coord. sont $x\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$ sera situé sur l'autre et, le rapport $\frac{y\sqrt{-1}}{x\sqrt{-1}}$ étant égal à $\frac{y}{x}$, ce point imaginaire correspondra à la même direction du rayon vecteur; et comme on a:

$$-(y^2+x^2) = (y\sqrt{-1})^2 + (x\sqrt{-1})^2$$

le diamètre imaginaire de l'une des indicatrices aura précisément un carré égal et de signe contraire au carré du diamètre réel de l'autre qui correspond à la même direction —

L'étude de la courbure des sections normales dans une surface dont l'indicatrice est une hyperbole se fera comme dans le cas d'une indicatrice elliptique. Les sections menées par la normale et les diamètres réels de l'indicatrice auront leur courbure dirigée vers le plan de cette indicatrice), et celles qui correspondent aux diamètres imaginaires ont leur courbure en sens opposé. Les unes ont leur rayon de courbure proportionnel au carré du diamètre réel correspondant, et les autres ont leur l'est proportionnel au carré du diamètre imaginaire; en sorte que le signe de ce carré indique le sens de la courbure.

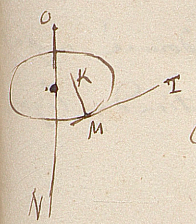
Les sections qui correspondent aux asymptotes ont des courbures infinies; on ne doit pas les considérer comme les sections de courbure maxima; ces sections sont celles qui sont menées par la normale et les axes de l'indicatrice, l'une correspondant à la plus grande courbure dans un sens, et l'autre à la plus grande courbure dans le sens opposé. —

Lignes de courbure

On nomme ligne de courbure d'une surface ~~donnée~~ une ligne tracée sur cette surface et telle que les normales à la surface menées par les différents points forment une surface développable. La détermination des lignes de courbure sur une surface donnée exige l'emploi du calcul intégral ; mais nous pouvons, dès à présent démontrer quelques propositions générales relatives à ces lignes.

Il passe en chaque point d'une surface deux lignes de courbures tangentes aux sections de courbure maxima et minima.

On sait en effet que la condition pour qu'une série de droites forment une surface développable est que la plus courte distance de deux droites consécutives soit un infᵗ petit d'un ordre supérieur au premier. Considérons un point O d'une surface et l'indicatrice que, pour fixer les idées, nous supposerons elliptique. Si l'on passe du point O à un point qcq de l'indicatrice, la normale en O étant ON et passant par le centre de l'indicatrice, la normale en M sera perpendiculaire à la tangente MI à cette courbe et, par se projettera sur le plan de l'indicatrice suivant la normale MK ; et la plus courte distance de cette normale à la normale ON sera la perpend. abaissée du centre sur la droite MK. Or si le point M n'est pas un des sommets



122 v

de l'ellipse indicatrice la distance d'une normale au centre est de même ordre que la dimension de l'ellipse, et, par suite, dans le cas actuel, inf^t petit du 1^r ordre. La surface dont la normale en O et la normale en M sont des génératrices ne peut donc être développable que si le p^t M est inf^t voisin d'un sommet de l'indicatrice, et p. cs les lignes de courbure qui passent en O doivent être tangentes aux sections principales.

Réciproquement, si une courbe est telle qu'en chacun de ses points elle touche la section normale de courbure maxima ou minima, le raisonnement précédent prouve qu'en chaque point de cette courbe, la normale à la surface et la normale en un point inf^t voisin pris sur la même courbe sont à une distance inf^t petite d'un ordre supérieur au premier, en sorte que la surface formée par les normales est développable.

L'équation d'une surface étant donnée, on peut déterminer de la manière suivante la direction des lignes de courbure en un point qcq —

soit $z = \varphi(x, y)$

l'éq. de la surface — les équations de la normale en point dont les coord. sont $x\,y\,z$ sont:

$$t - x + \frac{dz}{dx}(v - z) = 0$$
$$u - y + \frac{dz}{dy}(v - z) = 0$$

Posons pour abréger

$$\frac{dz}{dx} = p \qquad \frac{dz}{dy} = q.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

les équations deviennent

(1) $t - x + p(v - z) = 0$

(2) $u - y + q(v - z) = 0.$

La normale en un point voisin dont les coordonnées sont $x + dx$ $y + dy$ $z + dz$ aura pour équation.

(3) $t - x - dx + (p + dp)(v - z - dz) = 0$

(4) $u - y - dy + (q + dq)(v - z - dz) = 0$

et pour exprimer que les deux normales se rencontrent on retranchera l'éq. (1) de (3), et (2) de (4)

ce qui donnera:

$$dx + p\,dz - dp(v - z) = 0$$
$$dy + q\,dz - dq\,(v - z) = 0$$

et on ~~éliminera~~ égalera les valeurs de $v - z$ déduites de ces équation

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

C'est l'équation qui exprime que deux normales infᵗ voisines se rencontrent. —

123 v

avant de developper cette eq. , nous devons repondre à une difficulté qui peut se presenter. Deux normales menées en des points inft voisins d'une ligne de courbure ne doivent pas en general se couper. Leur plus courte distance doit être seulement un inft petit d'un ordre superieur au premier. Il semble cependant qu'en combinant les equations des deux normales nous avons exprimé qu'elles ont un point commun. Mais en y regardant de plus près, on verra que dans l'evaluation des coefficients de la seconde normale, lorsqu'on a representé par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coord. du point par lequel elle est menée et par $p+dp$ $q+dq$ les valeurs de p et q qui repondent à ce point, les inft petits du 2e ordre ont été negligés.

reprenons l'equation

$$\frac{dx+p\,dz}{dp} = \frac{dy+q\,dz}{dq}$$

on a d'ailleurs

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = \frac{dq}{dy}dy + \frac{dq}{dx}dx = s\,dx + t\,dy.$$

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = p\,dx + q\,dy.$$

L'équation devient en chassant les dénominateurs

$$\{dx(1+p^2)+pq\,dy\}(s\,dx+t\,dy) = (dy(1+q^2)+pq\,dx)(s\,dy+t\,dx)$$

ou en réduisant :

$$dy^2(pqt-(1+q^2)s)+dx\,dy\{(1+p^2)t-(1+q^2)r\}+dx^2((1+p^2)s-pqr)=0$$

et de cette équation on déduira pour chaque point de la surface deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, donnant les coefficients d'inclinaison des projections des tangentes aux lignes de courbure sur le plan des xy.

Il est souvent nécessaire de déterminer en un point la direction des sections principales et la grandeur de leur courbure sans faire aucune hypothèse sur le choix des axes coordonnés.

Considérons une courbe qcq tracée sur une surface ; son plan normal au point $x\,y\,z$ a pour équation

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0$$

le plan normal au point infᵗ voisin s'obtiendra en ajoutant au 1ᵉʳ membre de cette équation sa propre différentielle et son équation est :

$$(t-x)(dx+d^2x)+(u-y)(dy+d^2y)+(v-z)(dz+d^2z)=0$$

de sorte que les équations de la droite suivant laquelle se coupent les deux plans, c. a. d. l'axe du cercle osculateur

124 v

de la courbe seront

$$(t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = 0$$

$$(t-x)d^2x + (u-y)d^2y + (v-z)d^2z = ds^2$$

Cette droite rencontre ~~a id.~~ la normale à la surface au point xyz dont les équations sont

$$t - x + p(v-z) = 0$$

$$u - y + q(v-z) = 0$$

on en déduit pour les cond. du point d'intersection

$$v = z + \frac{1}{D} \qquad u = y - \frac{q}{D} \qquad t = x - \frac{p}{D}$$

en posant $\quad d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = D\,ds^2.$

Mais la valeur de D peut être transformée en différentiant l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

r s t désignant respectivement $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ $\frac{d^2z}{dy^2}$

On en conclut $D = \dfrac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{ds^2}$

remarquant que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sont les cosinus des angles α et β respectivement formés par la tgte à la courbe considérée avec l'axe des x et l'axe des y, on a

$$D = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

On voit que D a la même valeur pour toutes les courbes tangentes à une même droite, et quelle que

soit la direction de leur plan osculateur ; en sorte que tous les axes des cercles osculateurs de ces courbes passent par un même point situé sur la normale à la surface ; le centre de courbure de l'une q.c.q. d'entre elles s'obtiendra en projetant le point fixe sur le plan osculateur ; et l'on en conclut, conformément au théorème de Meunier que le rayon de courbure d'une section oblique est la projection du rayon de courbure de la section normale correspondante sur le plan de la section oblique.

Le rayon de courbure R de la section normale est éd. , d'après ce qui précède

$$(1)\quad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$$

Le maximum et le minimum de R correspondent au maximum et au minimum du dénominateur et ont lieu lorsque l'on a :

$$(2)\quad (r\cos\alpha + s\cos\beta)\, d\cos\alpha = -(s\cos\alpha + t\cos\beta)\, d\cos\beta$$

On a d'ailleurs entre les trois angles $\alpha\ \beta\ \gamma$ que la tangente forme avec les axes l'équation :

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

qui exprime qu'elle est située dans le plan tangent ; et en éliminant $\cos\gamma$ au moyen de la relation

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1.$$

125v

on trouve

(4) $(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1$

Cette equation donne par la différentiation

(5) $\left[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta\right] d\cos\beta = -\left((1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha\right) d\cos\beta$

en combinant cette equation avec celle qui a été obtenue plus haut, il vient

(6) $$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{t\cos\beta + s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}$$

~~(6)~~. Cette equation déterminera la direction des section principales

Si l'on multiplie par $\cos\alpha$ les deux termes du 1er membre de l'equation (6) et par $\cos\beta$ les deux termes du 2e membre en ajoutant ensuite les numérateurs entre eux et les denominateurs entre eux, on obtiendra précisément la quantité D qui est egale par conséquent à chacun des deux membres de l'equation (6).

On a donc:

$$r\cos\alpha + s\cos\beta = D\left\{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta\right\}$$
$$t\cos\beta + s\cos\alpha = D\left\{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha\right\}$$

ou $$\left(D(1+p^2) - r\right)\cos\alpha = (s - pqD)\cos\beta.$$

$$\left(D(1+q^2) - r\right)\cos\beta = (s - pqD)\cos\alpha.$$

Ces equations multipliées membre à membre donnent:

$$(1+p^2+q^2)D^2 - \left((1+p^2)t - (1+q^2)r - 2pqs\right)D + rt - s^2 = 0$$

et puisqu'on a

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$$

L'équation qui donne les rayons de courbure des sections principales est

$$(rt-s^2)R^2 - R\sqrt{1+p^2+q^2}\left((1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\right)+(1+p^2+q^2)^2=0$$

Si nous cherchons maintenant le point de rencontre de deux normales infiniment voisines menées par les points d'une ligne de courbure, nous avons vu que les coord. de ce point sont données par les équations

$$t - x + p(v-z) = 0$$

$$u - y + q(v-z) = 0$$

$$v-z = \frac{(1+p^2)dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy} = \frac{(1+q^2)dy+pq\,dx}{t\,dy+s\,dx}$$

En égalant entre elles les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par les deux dernières équations on trouve

$$\frac{1+p^2-r(v-z)}{pq-s(v-z)} = \frac{pq-s(v-z)}{1+q^2-s(v-z)}$$

Cette équation est du 2e degré en $(v-z)$ et ne diffère pas de l'éq. en D qui a été trouvée plus haut, par conséquent la valeur de $\frac{v-z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ qui représente la portion de la normale comprise entre la surface et le point de rencontre est précisément égale à $\frac{D}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

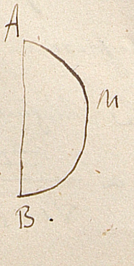
c. a. d. au rayon de courbure de la section principale. —

Lignes de courbure de quelques surfaces.

Surfaces de revolution — Les lignes de courbure d'une surface de revolution s'apercoivent immédiatement. Ce sont les meridiens et les paralleles de la surface. Les normales menées par les differents points d'un même meridien sont en effet situées dans un même plan qui est le plan meridien lui même ; les normales menées aux differents points d'un même parallele coupent l'axe au même point et forment un cone. Nous sommes donc ici dans un cas exceptionnel où deux normales infᵗ voisines se rencontrent rigoureusement et où leur plus courte distance est rigoureusement nulle.

On peut en un point d'une surface de revolution evaluer facilement les deux rayons de courbure de la surface c. a. d. les rayons des deux sections principales.

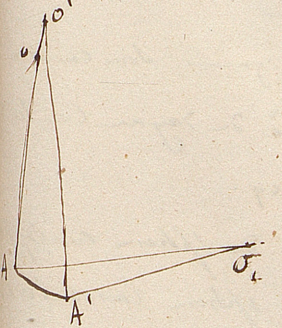
D'après ce qui a été dit, il suffit de mener deux normales à la surface par deux points infᵗ voisins d'une ligne de courbure de la surface, et de chercher le pᵗ d'intersection. On voit d'après cela que AMB étant la section meridienne d'une surface de revolution, l'un des rayons de courbure, celui qui correspond à la section meridienne sera le rayon de courbure même de la ligne AMB ; et



l'autre rayon, celui qui correspond au parallèle qui est la 2e ligne de courbure, sera la portion de la normale MI comprise entre le point M et l'axe. —

<u>Surface développable</u>. On aperçoit de suite sur les surfaces développables l'une des séries de lignes de courbure; ce sont les génératrices rectilignes. Puisqu'en effet sur une telle surface le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice les normales menées en ses différents points sont parallèles et forment un plan qui est une surface développable; il en résulte que les lignes de courbure de l'autre système sont, sur la surface les courbes qui coupent à angle droit les génératrices.

Si l'on applique ce qui a été dit, on voit que l'un des rayons de courbure est infini; car les normales en deux points infiniment voisins d'une même génératrice sont parallèles. L'autre rayon de courbure varie d'un point à l'autre sur une même génératrice, et il est facile de trouver suivant quelle loi.



Soient OA O'A' deux génératrices infiniment voisines, O et O' les points où elles touchent l'arête de rebroussement. Soit AA' un arc infiniment petit d'une ligne de courbure normale à ces deux droites; si par les points A et A' nous menons des normales à la surface et qu'elles se coupent en un point O_1, AO_1 sera le rayon de courbure cherché R, et l'on

127 r

aura evidemment $R = \frac{AA'}{(A O_1 A')}$

et comme l'angle AO_1A' est le même pour deux generatrices données, quelle que soit la position du point A sur l'une d'elles, R est proportionnel à AA'. Or les deux generatrices peuvent être considerées comme se coupant en un point I situé sur l'arete de rebroussement et en nommant ε leur angle on

aura $AA' = IA \times \varepsilon$

donc $R = \frac{IA \times \varepsilon}{AO_1A'}$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{AO_1A'}$ etant constant pour une même generatrice quelle que soit la position du point A, on voit que le rayon de courbure en un point est, pour une même generatrice, proportionnel à la distance qui separe ce point de l'arete de rebroussement.

On peut remarquer que l'angle ε est l'angle de contingence de l'arete de rebroussement, et l'on voit facilement en se reportant à ce qui a été dit que AO_1A' est l'angle de deux plans osculateurs infᵗ voisins.

Surfaces canaux. — On designe sous ce nom l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe qcq.

Si l'on considère une série de spheres enveloppées infᵗ voisines les unes des autres, deux spheres consecutives

se coupant suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres, et, p.c.s. infiniment peu different d'un grand cercle de l'une et l'autre sphère. Chacune des sphères est coupée suivant un tel cercle par la sphère qui la precede et par celle qui la suit; et la suite des portions comprises sur chaque sphère entre les deux cercles, forme une surface discontinue, empruntant à chacune des sphères une petite zone; la limite de cette surface est evid. la surface canal enveloppe de toutes les sphères et touchant chacune d'elles suivant un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne parcourue par le centre.

Il est evident que les lignes de courbure d'une surface canal sont precisement les cercles de contact de la sphère enveloppée; car aux differents points d'un même cercle la normale à la surface coincide avec la normale à la sphère, et le lieu des normales est p.c.s. le plan même du cercle — les lignes de courbure de l'autre systeme sont celles qui sur la surface coupent à angle droit les differents cercles

On voit d'après ce qui a été dit que le rayon de courbure correspondant aux lignes de courbure circulaires est constant et egal au rayon de la sphère enveloppée; car les normales menées en deux points infiniment voisins d'une telle ligne de courbure, se coupent au centre même de la sphère enveloppée.

128 v

Equation de quelques surfaces.

Surface cylindrique. Soient.

$$x = az \qquad y = bz$$

les equation d'une parallele aux generatrices et

$$(1) \quad x = az + p$$

$$(2) \quad y = bz + q$$

celles d'une generatrice quelconque. lorsqu'on passera d'une generatrice à l'autre p et q varieront, mais il existera entre eux une certaine relation exprimant que la droite rencontre constamment la base donnée du cylindre. soit

$$p = \varphi(q)$$

cette relation. en eliminant p et q entre (1) (2) (3), on aura

$$(4) \quad y - bz = \varphi(x - az)$$

qui est l'eq. generale des surfaces cylindriques. il est facile de montrer que quelle que soit la fonction φ, cette eq. represente un cylindre. car si l'on cherche l'intersection de cette surface avec le plan dont l'equation est

$$(5) \quad x = az + p$$

on trouvera pour projection de cette intersection sur le plan des yz

$$(6) \quad y - bz = \varphi(p)$$

et les equation (5) et (6) representent une ligne droite, variable de position avec p et parallele à une direction fixe, en sorte que la surface est le lieu d'une série de droites paralleles, et p.c. cylindrique.

L'équation

$$(y - bz) = \varphi(x - az)$$

conduit à une relation simple entre les deux dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$ de z par rapport à x et à y. Si l'on différentie en effet successivement cette équation par rapport à x et à y on aura

$$-b\frac{dz}{dx} = \varphi'(x-az)\left(1 - a\frac{dz}{dx}\right)$$

$$1 - b\frac{dz}{dy} = -\varphi(x'-az)\,a\frac{dz}{dy}.$$

D'où l'on conclut :

$$\left(1 - a\frac{dz}{dx}\right)\left(1 - b\frac{dz}{dy}\right) = ab\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}$$

et par suite :

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$$

Telle est la relation annoncée ; elle exprime, comme on le voit facilement en se reportant à l'éq. du plan tangent, que tous les plans tangents de la surface sont parallèles à un plan fixe.

<u>Surfaces coniques.</u> Soient α β γ les coord. du sommet, les éq. d'une génératrice sont :

(1) $x - \alpha = m(z - \gamma)$

(2) $y - \beta = n(z - \gamma)$

et pour exprimer que cette génératrice rencontre la base du cône il faut établir entre m et n une certaine relation.

(3) $m = \varphi(n)$.

Si entre les éq. (1) (2) (3) on élimine m et n,

129v

on trouve (4) $$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)$$

c'est l'equation generale des surfaces coniques.

On peut deduire de cette equation une relation remarquable entre les derivées partielles $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$: en differentiant l'equation (4) par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$\frac{(z-\gamma)-(x-\alpha)\frac{dz}{dx}}{(z-\gamma)^2} = -\varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\cdot\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2}\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2}\frac{dz}{dy} = \varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left(\frac{z-\gamma-(y-\beta)\frac{dz}{dy}}{(z-\gamma)^2}\right)$$

d'ou l'on deduit :

$$\left\{(z-\gamma)-(x-\alpha)\frac{dz}{dx}\right\}\left(z-\gamma-(y-\beta)\frac{dz}{dy}\right) = (x-\alpha)(y-\beta)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}$$

c. a. d.

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dx} + (y-\beta)\frac{dz}{dy} = (z-\gamma).$$

En se reportant à l'eq. du plan tgt, on voit que cette relation exprime que tous les plans tangents au cone passent par le sommet.

Surfaces de revolution – Soient

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

les equations de l'axe d'une surface de revolution. Cette surface peut être engendrée par un cercle dont le centre reste constamment sur l'axe auquel son plan est perpendiculaire

or un pareil cercle peut être considéré comme l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe avec une sphère ayant son centre en un point qcq. de cet axe, par exemple le cercle dont les coord. sont ρ, q, et o. L'un des cercles générateurs de la surface peut donc être représenté par les deux équations

(1) $(x-\rho)^2+(y-q)^2+z^2=R^2$

(2) $ax+by+cz=K.$

et pour exprimer que ce cercle est bien un de ceux qui composent la surface, il faudra écrire qu'il rencontre la courbe méridienne et établir pour cela une relation entre K et R^2.

(3) $K=\varphi(R^2)$.

en éliminant K entre (1) (2) (3) on obtient:

(4) $ax+by+cz=\varphi\left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2\right)$

c'est l'équation générale des surfaces de révolution.

On peut déduire de cette équation une relation entre les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$.

Si l'on différentie (4) successivement par rapport à x et par rapport à y on obtient

$$a+\frac{dz}{dx}=\varphi'\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2\right\}\left\{2(x-\alpha)+2(z-\gamma)\frac{dz}{dx}\right\}$$

$$b+\frac{dz}{dy}=\varphi'\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2\right\}\left(2(y-\beta)+2(z-\gamma)\frac{dz}{dy}\right)$$

d'où l'on déduit:

$$\left(a+\frac{dz}{dx}\right)\left(y-\beta+(z-\gamma)\frac{dz}{dy}\right)=\left(a+\frac{dz}{dy}\right)\left\{x-\alpha+(z-\gamma)\frac{dz}{dx}\right\}$$

ou

$$\frac{dz}{dx}(y-\beta) - \frac{dz}{dy}(x-\alpha) = b(x-\alpha) - a(y-\beta)$$

Cette équation exprime comme on l'a vu que la Normale en chaque point rencontre l'axe de la surface de révolution.

Calcul intégral.

Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel; le but que l'on s'y propose est de remonter de la différentielle d'une fonction, ou plus généralement d'une propriété de cette différentielle à la connaissance de la fonction. Nous nous bornerons d'abord au cas le plus simple, c. à d. à la recherche d'une fonction dont on donne la différentielle —

Soit $\varphi(x)dx$ la différentielle donnée d'une fonction d'x; la fonction primitive existe nécessairement, car en construisant la courbe dont

$$y = \varphi(x)$$

est l'éq. en coord. rectangulaires, on sait que l'aire comprise entre une ordonnée fixe de cette courbe et l'ordonnée correspondant à l'abscisse x a pour différentielle $\varphi(x)dx$; et, p.c.s., cette aire, qui évid. est une fonction bien déterminée de x, est la fonction primitive que nous cherchons et dont l'existence se trouve par là même démontrée.

Il est clair que l'ordonnée initiale à partir de laquelle l'aire est comptée est entièrement arbitraire, et qu'on peut, en la déplaçant, augmenter ou diminuer la fonction d'une quantité constante.

Sans recourir à cette considération, on voit d'ailleurs que si $F(x)$ est la fonction primitive de $\varphi(x)dx$, $F(x)+C$ l'est également et l'on sait même qu'il ne peut pas en exister d'autres, car si deux fonctions ont même différentielle, elles diffèrent par une constante.

La fonction primitive d'une différentielle donnée se désigne par le signe $\int$. — $\int \varphi(x)dx$. désigne, d'une manière générale toute fonction dont $\varphi(x)dx$ est la différentielle. Le signe $\int$, initial du mot <u>somme</u> rappelle que l'intégrale est représentée comme on l'a indiqué par l'aire d'une courbe, et celle-ci est si l'on veut la limite de la somme des rectangles inscrits, dont l'expression analytique serait, en désignant par a la 1re abscisse

$$\varphi(a)dx + \varphi(a+dx)dx + \varphi(a+2dx)dx + \ldots \varphi(a+ndx)dx$$

n étant un nombre tel que l'on ait :

$$a+ndx = x.$$

Intégration immédiate. —

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C$$

Nous ferons une remarque sur la formule ;

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

cette formule semble en défaut dans le cas de $m = -1$ car elle donnerait

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C.$$

On peut cependant bien facilement en déduire la valeur véritable de $\int \frac{dx}{x}$. — determinons la constante C de manière que l'integrale s'annulle pour une valeur déterminée de x, a par ex. ; on aura en général

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

et en faisant actuellement $m = -1$, le 2.e membre prend la forme $\frac{0}{0}$; prenons la dérivée des deux termes par rapport à m. il vient $lx - la$ —

Donc $\int \frac{dx}{x} = lx + C$ —

Nous allons passer en revue les diverses methodes d'integration dont nous aurons ensuite à faire usage.

—

Intégration par changement de variables.

Soit $\int \varphi(x)\, dx$ —

faisons $x = f(z)$.

z étant la nouvelle variable que l'on veut adopter. On aura. $dx = f'(z)dz$.

donc. $\varphi(x)\,dx = \varphi\left(f(z)\right)f'(z)\,dz$..

si l'on peut intégrer

$$\varphi\left(f(z)\right)f'(z)\,dz$$

en remplaçant dans le résultat z par sa valeur en fonction de x, on aura l'intégrale demandée.

Soit par ex. à intégrer

$$\frac{dx}{x}\sqrt{1+lx}.$$

Posons $\quad 1+lx = z.$

$$\frac{dx}{x} = dz.$$

l'intégrale devient

$$\int\sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(1+lx\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Soit encore $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Posons $tg\frac{1}{2}x = z$ –

Intégration par décomposition. Cette méthode consiste à partager la différentielle que l'on veut intégrer en plusieurs autres plus simples —

$$\int \sin^2 x \, dx$$

on a $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos 2x \, dx}{2}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}.$$

Toutes les puissances des sinus et des cosinus peuvent s'intégrer de cette façon —

Intégration par partie. — cette méthode est fondée sur la formule qui donne la différentielle d'un produit. on a $duv = udv + vdu$

et par. $\int udv = uv - \int vdu$.

si donc on peut intégrer la différentielle vdu, on saura par cela même intégrer udv. D'après cela une expression différentielle étant donnée, on la partagera, pour l'intégrer, en deux facteurs dont l'un sera choisi de manière à ce qu'on sache l'intégrer. en nommant u le premier de ces facteurs et dv le second, la formule précédente nous donnera l'expression de l'intégrale cherchée qui sera ramenée à l'intégrale nouvelle $\int vdu$. L'habileté du calculateur consiste à choisir les deux facteurs de la différentielle proposée de telle sorte que l'opération simplifie autant que possible le résultat. —

Soit par exemple à intégrer $\int x^3 \sin x\, dx$ —

la décomposition en facteurs peut se faire de deux manières ;

$x^3 (\sin x\, dx)$ — $\sin x\, (x^3 dx)$. —

la 1re manière est la plus avantageuse, car l'intégrale à laquelle à laquelle on sera ramené sera plus simple que l'intégrale primitive, puisqu'on aura à différentier x^3 —

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x\, dx$$

$$\int 3x^2 \cos x\, dx = 3x^2 \sin x - \int 6x \sin x\, dx.$$

$$-\int 6x \sin x\, dx = 6x \cos - \int \cos x\, dx \text{ —}$$

d'où

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - \sin x$$

Soit encore $\int x^m lx\, dx$. — on peut écrire

$$\int lx\ x^m dx \text{ —}$$

en considérant $x^m dx$ comme un seul facteur, après la 1re différentiation la partie transcendante aura disparu

$$\int lx . x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$\int x \arcsin x \, dx = \int \arcsin x . \underline{x\,dx}$$

$$\int \arcsin x . x\,dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x . \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int dx \sqrt{1-x^2}$$

$$\int dx \sqrt{1-x^2} = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donc

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et par suite.

$$2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

et il est facile maintenant d'avoir $\int \arcsin x \, dx$.

Intégration des fractions rationnelles.

On sait que.

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = f(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \text{—}$$

135 v

Si on veut intégrer une pareille fraction, il faudra intégrer chaque partie de la somme —

$\int f(x)\,dx$ s'intègre immédiatement, car $f(x)$ est un polyn. entier.

$\int \frac{A\,dx}{x-a}$ est égal à $A\,l(x-a)$.

$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^p}$ est égal à $-\frac{A}{(p-1)(x-a)^{p-1}}$

ainsi l'intégration se fera facilement —

Mais il y a une remarque; c'est qu'en agissant ainsi on compliquerait le résultat d'imaginaires. —

Soient d'abord deux racines imaginaires. —

Les termes correspondants seront

$$(P+Q\sqrt{-1})\,l(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}) + (P-Q\sqrt{-1})\,l(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$P\,l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + Q\sqrt{-1}\{l(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}) - l(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})\}$$

et — les imaginaires disparaîtront —

on pourrait intégrer directement $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

—

intégrer. $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^2}$.

La méthode exposée pour l'intégration des fractions rationnelles est tout à fait générale; mais dans un grand nombre de cas, il est beaucoup plus simple d'avoir recours à des moyens particuliers. Soit par exemple

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}.$$

Posons $x^2 = z$ d'où $x\,dx = \frac{1}{2}dz$.

L'intégrale devient $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arctg}\, z.$

Considérons cet autre exemple

$$\int \frac{x^m dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Au lieu d'appliquer la méthode générale intégrons par parties. On a :

$$\int \frac{x^m dx}{(a^2+x^2)^n} = \int \frac{x^{m-1}\cdot x\,dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

Voilà la formule de réduction ; l'exposant m est diminué de 2 unités ; et l'exposant n est diminué d'une unité.

Supposons que m soit plus grand que $2n$; on épuisera n avant d'avoir épuisé m, et on arrivera à l'intégrale

$$\int \frac{x^{m-2(n-1)}}{a^2+x^2}dx.$$

alors l'intégration pourra se faire sans peine ; car la division du numérateur par le dénominateur pourra être effectuée ; on aura un quotient entier et le terme complémentaire du quotient sera de la forme $\frac{Ax+B}{a^2+x^2}$, que nous savons intégrer.

Si l'on a $m < 2n$, on épuisera m avant d'avoir épuisé n, et l'exposant de x arrivera à être 1 ou 0. de sorte qu'on arrivera à l'une des deux intégrales

$$\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^k} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k}$$

La 1re s'intègre immédiatement —
Nous savons intégrer la deuxième qui est de la forme $\int \frac{dx}{(1+x^2)^r}$.

Soit à intégrer

$$\int \frac{(a+bx)^p\,dx}{x^n}$$

Si n est entier, on pourrait développer par la formule du binome et on aurait une suite de monomes qu'on intégrerait immédiatement; mais on peut trouver une formule de réduction. On a:

$$\int \frac{(a+bx)^p\,dx}{x^n} = \frac{(a+bx)^{p+1}}{(p+1)b\,x^n} + \frac{n}{(p+1)b}\int \frac{(a+bx)^{p+1}}{x^{n+1}}\,dx.$$

Les exposants de $a+bx$ et de x sont chacun augmentés d'une unité; il est clair qu'on peut prendre pour inconnue l'intégrale qui se trouve dans le 2e membre. On a alors une formule de réduction qui s'applique dans le cas où p est fractionnaire, et négatif. —

Soit enfin à intégrer

$$\int \frac{dx}{x^n(a+bx)}.$$

on a :

$$\int \frac{dx}{x^n(a+bx)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx(a+bx-bx)}{x^n(a+bx)} = \int \frac{dx}{x^n} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a+bx)}.$$

qui est u. d. une formule de réduction.

Intégration des fonctions algébriques irrationnelles –

(Voyez Sturm, Duhamel).

—

Soit à intégrer $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+x^2}}$

Posons $\frac{1}{x} = z$ d'où $dx = -\frac{dz}{z^2}$ il vient

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{-dz}{z\sqrt{a+\frac{b}{z}+\frac{c}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+bz+c}}$$

On retombe ainsi sur la formule ordinaire.

—

Intégrer la fonction $F(x, \sqrt[n]{a+bx})dx$, la fonction F ne désignant que des opérations algébriques. On rendra la fonction rationnelle en posant

$$\sqrt[n]{a+bx} = z$$

Si l'on a $F(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x})dx$, en posant $\sqrt{a+bx} = z$, on n'aura plus qu'un seul radical du 2e degré $\sqrt{a'+\frac{b'}{b}(z^2-a)}$ —

— Différentielles binomes. —

$x^m(a+bx^n)^p dx$. —

m, n, p sont des nombres quelconques — On peut toujours supposer que m et n sont des nombres entiers. — (Voyez le cours de Sturm et celui de Duhamel). —

138 r

Intégration des fonctions exponentielles logarithmiques et circulaires —

—

(Voir le cours de Duhamel et celui de Sturm).

Intégrales définies.

Définition — Considérons d'abord l'aire d'une courbe

$$A = \int (y\,dx)_x - \int (y\,dx)_a .$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale définie de l'aire depuis la valeur a jusqu'à la valeur x.

Cette définition est générale et s'applique à une intégrale quelconque; en général on a

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Cette définition est générale et s'applique même au cas où b serait $< a$: on aurait

$$\int_b^a F'(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

L'intégrale a simplement changé de signe. On peut donc écrire

$$\int_a^b F'(x)\,dx = -\int_b^a F'(x)\,dx.$$

Il y a dans la définition de l'intégrale définie, une exception à signaler; il ne faut pas que la fonction devienne infinie pour une valeur comprise entre les deux limites de l'intégration; car dans ce cas on pourrait bien avoir des éléments infinis, lorsque

l'intégrale calculée d'après la règle énoncée, en accuse l'existence.

Soit par exemple $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$.

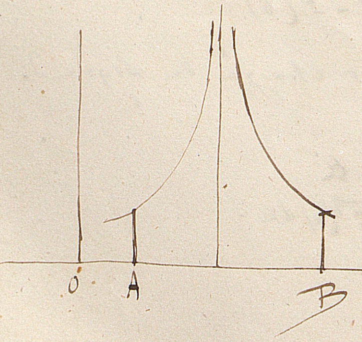
$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = (lx)_{-1}^{+1} = l(1) - l(-1)$; nous trouvons une valeur imaginaire pour l'intégrale définie.

Soit encore

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}^{+1} = -2.$$

L'intégrale définie calculée, d'après la règle générale est négative, et cependant tous les éléments de l'intégrale sont positifs —

A quoi cette anomalie tient elle ?



Pour les deux exemples, comme pour les autres, cela tient en général à ce que nous avons dit sur l'aire de surface devient inexact quand la fonction devient infinie entre les limites de l'intégration. On ne peut pas en marchant sur la courbe d'une manière continue, passer d'une branche à l'autre. —

On aura la vraie valeur de l'intégrale en faisant la somme des deux intégrales

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{+1}\frac{dx}{x^2}.$$

de cette façon, on voit bien qu'on a l'infini.

Ceci se voit plus clairement encore, en mettant au lieu de la limite zéro, une limite très petite, ce qui donne

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)_{-1}^{-\varepsilon}+\left(-\frac{1}{x}\right)_{\varepsilon}^{+1}=\frac{2}{\varepsilon}-2$$

Généralement soit,

$$\int_a^b F'(x)\,dx$$

$F'(x)$ devenant infinie, pour une valeur $x=\alpha$ intermédiaire entre a et b. La valeur de l'intégrale définie sera la limite de

$$\int_a^{\alpha-\varepsilon}F'(x)\,dx+\int_{\alpha+\varepsilon}^{b}F'(x)\,dx=F(\alpha-\varepsilon)-F(a)+F(b)-F(\alpha+\varepsilon).$$

il peut arriver que la différence $F(\alpha-\varepsilon)-F(\alpha+\varepsilon)$ soit nulle; mais cette différence peut tendre vers l'infini; elle peut, même être indéterminée; et on comprend qu'on n'a pas le droit de supprimer les deux termes sans faire de vérification.

Quand on cherche l'intégrale définie d'une fonction, il arrive souvent que la formule à laquelle on arrive est plus simple que si l'intégrale était indéfinie.

Soit par exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$:

la formule de réduction dans le cas général est

$$m\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,dx$$

par suite

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \left(-\sin^{m-1}x\cos x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\,dx$$

ou bien

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\,dx.$$

Quelquefois on peut trouver une intégrale définie par un procédé qui tient essentiellement à ce que l'intégrale est définie.

Par exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ est la même chose que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$$

Cela se voit en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$;

l'une de ces deux intégrales est donc égale à la

moitié de leur somme et l'on a par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

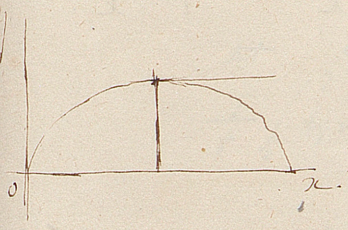
— Application géométriques. —

aire des courbes en coordonnées rectilignes. —

id — en coordonnées polaires. —

---

rectification des arcs de courbe. —



Longueur de l'arc de cycloïde. —

avec ce système d'axes, on peut prendre les équations de la cycloïde en fonction de u

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

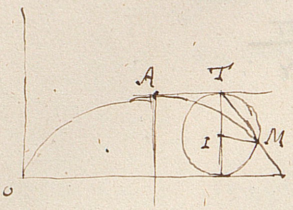
Nous calculerons ds en fonction de u.

$$ds^2 = a^2(1-\cos u)^2 du^2 + a^2 \sin^2 u\, du^2$$
$$ds^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{u}{2}\, du^2$$
$$ds = 2a \sin \tfrac{1}{2}u\, du$$
$$s = -4a \cos \tfrac{1}{2}u + C.$$

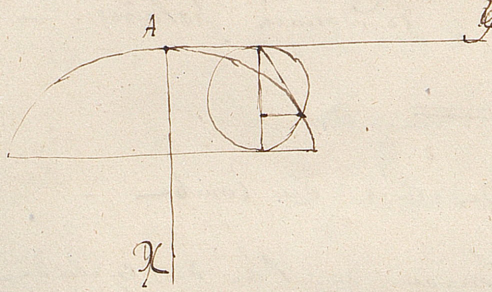
Si l'on veut avoir un arc compté à partir

Du sommet de la cycloïde, on aura

$$s = \left(-4a\cos\tfrac{1}{2}u\right)_{\varpi}^{\varpi+\alpha} = 4a\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$



soit AM cet arc qu'on veut évaluer ; — TIM sera précisement égal à α. et l'on voit par la valeur ci-dessus que la longueur de l'arc AM est précisément le double de TM.



en prenant un autre système d'axes, (celui qui est à la figure) on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x(2a-x)}}{x} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{2a-x}{x}} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

$$s = 2\sqrt{2ax}.$$

---

arc d'hélice — les équations de l'hélice sont :

$$x = R.\cos\omega \qquad dx = -R\sin\omega\, d\omega$$

$$y = R\sin\omega \qquad dy = R\cos\omega\, d\omega$$

$$z = aR\omega. \qquad dz = aR\,d\omega.$$

$$ds^2 = R^2(1+a^2)d\omega^2.$$

$$ds = R\sqrt{1+a^2}\,d\omega$$

$$s = R\sqrt{1+a^2}\times\omega.$$

Calculer la longueur de l'arc de parabole —

$$y^2 = 2px.$$

$$ds^2 = dy^2 + \frac{y^2 dy^2}{p^2} \qquad ds = \frac{dy\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

Donc $\quad s = \frac{1}{p}\int_0^y dy\sqrt{y^2+p^2}.$

$$\int dy\sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{y^2+p^2} - \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

$$\int dy\sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{y^2+p^2} - \int \frac{(y^2+p^2)dy}{\sqrt{y^2+p^2}} + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

Donc

$$\frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2} l.\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) + C$$

et enfin

$$\frac{1}{p}\int_0^y dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right)$$

Mais il y a bien des arcs de courbe dont on ne sait pas trouver l'expression.

Considérons l'arc d'ellipse. —

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quel que soit l'angle φ, il est clair qu'on satisfera à l'éq. de l'ellipse en posant

$$x = a\cos\varphi \qquad y = a\sin\varphi.$$

$$dx = -a \sin\varphi \, d\varphi$$
$$dy = b \cos\varphi \, d\varphi$$
$$ds = d\varphi \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$$
$$ds = d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi}$$
$$ds = a \, d\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi}$$

On ne connait pas de procédé d'intégration directe pour cette fonction.

Cubature des solides. —

Solides de révolution —

Volume engendré par la cycloïde tournant autour de sa base.

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

$$V = \varpi \int y^2 dx = \varpi a^3 \int (1 - \cos u)^3 du$$
$$V = 8 \varpi a^3 \int \sin^6 \tfrac{1}{2} u \, du.$$

en posant $\frac{1}{2} u = \varphi$, il vient:

$$V = 16 \varpi a^3 \int_0^{\varpi} \sin^6\varphi \, d\varphi = 32 \varpi a^3 \int_0^{\frac{\varpi}{2}} \sin^6\varphi \, d\varphi.$$

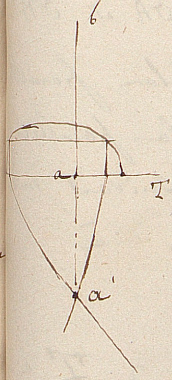
Expression qu'on sait intégrer.

Les volumes des solides de révolution s'obtiennent au moyen d'une seule intégration.

Il en est de même toutes les fois que les sections parallèles à un certain plan sont des figures dont on peut déterminer l'aire.

applications : au cone —

à l'ellipsoïde — —



La même méthode peut être appliquée aux Conoïdes,

en supposant l'axe (a', ab) vertical, il est clair que les sections de la surface par des plans horizontaux sont des triangles, qui ont tous même hauteur. soit h cette hauteur, on aura

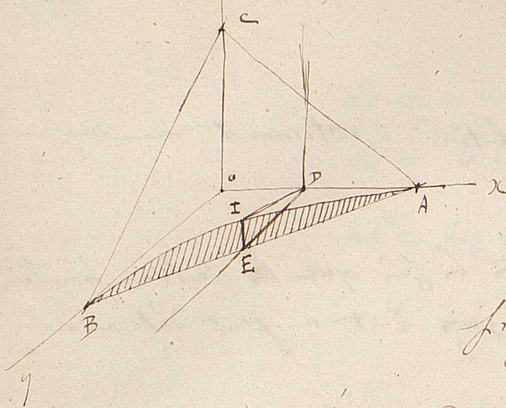
$$V = \frac{1}{2}\int b\,dz.$$

b désignant la base d'un triangle quelconque.

On demande d'évaluer le volume compris entre les deux surfaces

$$z = xy$$
$$x + y + z = 1$$

et les trois plans coordonnés. —



la surface $z = xy$ est un paraboloïde hyperbolique; les axes ox et oy sont des génératrices de ce paraboloïde — cette surface et le plan donné se coupent suivant une courbe dont la projection sur le plan xoy a pour équation

$$x + y + xy = 1.$$

équation d'une hyperbole; la partie ombrée représente la portion du plan ABC comprise entre la droite AB, et la courbe d'intersection dont il s'agit. ainsi le volume qu'il s'agit d'évaluer est le volume compris entre le plan xoy, la partie ombrée du plan ABC, et le paraboloïde qui s'élève au dessus du plan xoy à partir des droites OA et OB.

Les sections de ce volume par des plans parallèles au plan zoy sont des triangles; car un plan parallèle à zoy coupe le paraboloïde hyperbolique suivant une droite. le volume cherché est donc égal à

$$V = \int_0^1 T\,dx.$$

T désignant un triangle — cherchons l'expression de T en fonction de x.

la base DE est égale à $1 - x$ —

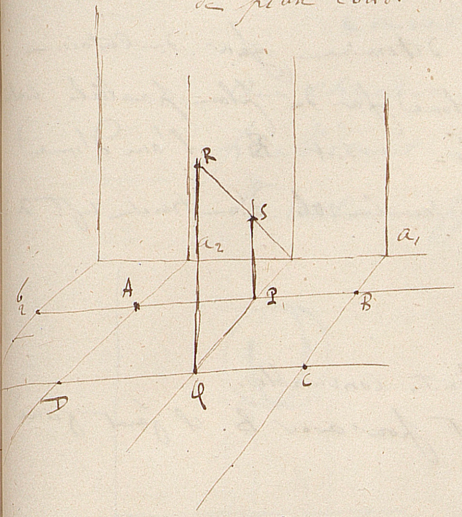
la hauteur du triangle est le z du point I; pour avoir ce z, j'élimine y entre l'équation du paraboloïde et celle du plan; ce qui donne

$$z = x(1 - x - z) \quad \text{d'où} \quad z = \frac{x - x^2}{1 + x}.$$

par suite $T = \frac{1}{2}(1 - x)\frac{x - x^2}{1 + x}.$

=

Voici encore un exemple où la section parallèle à un des plans coord. doit peuvent être facilement déterminée.



Soit la surface

$$z = xy$$

on demande d'estimer le vol. compris entre cette surface et les quatre plans parallèles aux plans coordonnés $a_1 \; a_2 \; b_1 \; b_2$ —

Si l'on mène un plan PQ parallèle au plan zoy, ce plan coupe le volume en question suivant un trapèze PQRS, car il coupe la surface $z = xy$ suivant une ligne droite.

Evaluons la surface du trapèze PQRS.

$$PQRS = \frac{b_1 - b_2}{2}\left(b_1 x + b_2 x\right).$$

Par suite

$$V = \int_{a_1}^{a_2} \frac{b_1 - b_2}{2}\left(b_1 x + b_2 x\right) dx$$

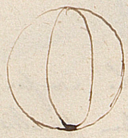
$$V = \frac{\left(b_1^2 - b_2^2\right)\left(a_2^2 - a_1^2\right)}{4}.$$

Cette expression peut se mettre sous une forme assez remarquable.

$$V = \frac{(b_1 - b_2)(a_1 - a_2)(b_2 a_2 + b_2 a_1 + b_1 a_2 + a_1 b_1)}{4}.$$

On voit que le vol. est égal au $\frac{1}{4}$ du produit de la base ABCD par la somme des 4 arêtes.

Il n'arrive pas toujours que les sections parallèles à un certain plan suffisent être ainsi déterminées; dans ce cas il faudra faire deux intégrations.



Soit un vol. qcq. déterminé par de certaines équations; coupons ce volume par des plans parallèles entre eux et infiniment rapprochés. Soit B l'aire d'une de ces sections; Bdx sera le vol. d'une tranche infiniment mince et le volume sera égal à

$$\int B dx$$

l'intégrale étant prise entre des limites convenables.

Mais B est une surface, et pour avoir B il faut faire une intégration; on a

$$B = \int dy (z_2 - z_1).$$

de telle sorte que le volume sera

$$V = \int dx \int dy (z_2 - z_1)$$

il faudra donc faire deux intégrations successives, ~~c'est ce que~~ ou avoir ce qu'on appelle une intégrale double.

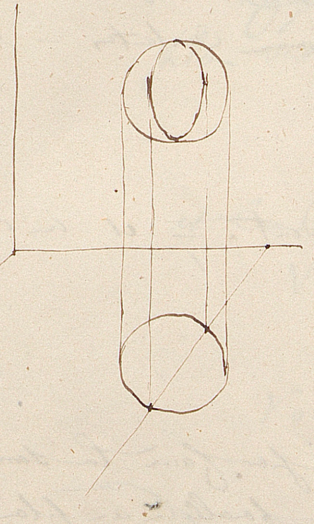
Il faut bien savoir comment on déterminera les limites entre lesquelles se fera l'intégration; c'est la partie importante de la question.

D'abord entre quelles limites prendra-t-on $\int dy (z_2 - z_1)$? z_2 et z_1 sont dans chaque cas particulier des fonctions connues de x et y; on laisse x constant, et on intègre entre les deux valeurs extrêmes de y, y_2 et y_1 — ces valeurs y_2 et y_1 sont des fonctions de x; de telle sorte que $\int_{y_2}^{y_1} dy (z_2 - z_1)$ est une fonction de x; on intègre enfin

Cette expression entre les deux valeurs extrêmes de x qui sont des contacts a et b.

Comment déterminera-t-on les limites y_2 y_1 a b.

On cherchera le cylindre circonscrit au corps donné parallèlement à l'axe des z, ou ce qui est la même chose le contour apparent ; l'équation de ce cylindre sera donnée par l'élimination de z entre les deux équations

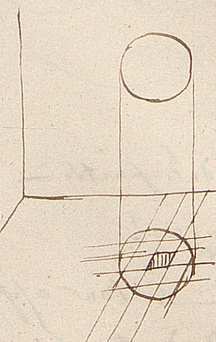


$$F(x,y,z)=0$$
$$\frac{dF}{dz}=0$$

y_2 et y_1 sont les deux valeurs de y qui correspondent à x dans l'équation du contour apparent.

a et b sont les abscisses extrêmes du contour apparent.

On peut trouver l'expression du volume par d'autres considérations.



Je détermine comme précédemment le contour apparent. Je mène des plans parallèles au plan des xz, et d'autres plans parallèles au plan des zy, ces plans étant très rapprochés.

Je considère comme élément de volume la partie projetée sur un des petits rectangles assez petits ; cet élément de volume

a pour expression

$$dx\,dy\,(z_2 - z_1)$$

z_2 et z_1 étant les deux valeurs de z correspondantes aux valeurs de x et y considérées.

Il faut maintenant faire la somme de tous ces éléments ; je fais d'abord la somme de ceux qui sont ~~parallèles au~~ sont compris dans une tranche parallèle au plan zoy, il faut alors regarder x et dx comme constantes — et l'on a

$$dx\int_{y_2}^{y_1} dy\,(z_2 - z_1)$$

c'est le $B\,dx$ du calcul précédent. — et on aura ensuite pour le volume

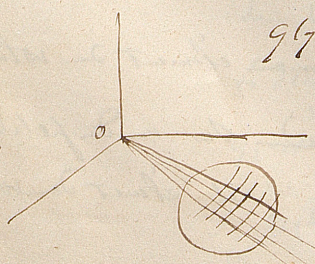
$$V = \int_a^b dx \int_{y_2}^{y_1} dy\,(z_2 - z_1)$$

On aurait pu commencer par faire la somme des éléments compris dans une tranche parallèle au plan zox. auquel cas on aurait eu pour le volume

$$V = \int_c^d dy \int_{x_2}^{x_1} (z_2 - z_1)\,dx \,.$$

Voici un autre mode de décomposition qui peut quelquefois être employé avec avantage.

déterminant toujours le contour apparent. je mène par le point O des droites faisant entre elles des angles infiniment petits, et du même point O je décris des arcs de cercle infiniment rapprochés.



un élément de surface sur le contour apparent est
$\rho\, d\omega\, d\rho$; et l'élément de volume correspondant est

$$\rho\, d\omega\, d\rho\, z.$$

en supposant que le ~~surface~~ volume s'étende jusqu'au plan
xoy. —

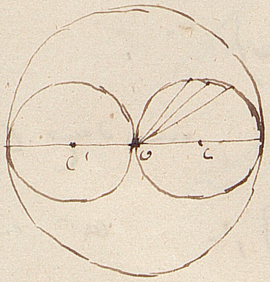
Je prends la somme des éléments contenus entre deux
plans verticaux, cette somme sera

$$d\omega \int_{\rho_2}^{\rho_1} z \rho\, d\rho.$$

et le volume total sera

$$V = \int_{\omega_2}^{\omega_1} d\omega \int_{\rho_2}^{\rho_1} z \rho\, d\rho.$$

Voici une application de cette méthode. —



Considérons une sphère et un grand cercle.
Décrivons sur (le diamètre de) ce grand cercle deux autres cercles
C et C'. Imaginons deux cylindres ayant
pour base les cercles C et C', et dont les
génératrices sont perpendiculaires au plan
du grand cercle. On demande de déterminer
le volume des portions de ces deux cylindres
qui sont compris dans la sphère.

Je décompose, comme je l'ai dit la base d'un
des cylindres au moyen des coord. polaires ; l'aire
de ces petites bases a pour expression $\rho\, d\omega\, d\rho$

146 v

l'élément de volume correspondant sera

$$\rho\, d\omega\, d\rho\, z = \rho\, d\omega\, d\rho \sqrt{R^2-\rho^2}$$

en faisant l'intégration comme nous l'avons dit précédemment, on aura d'abord

$$d\omega \int \rho\, d\rho \sqrt{R^2-\rho^2}$$

c. a. d.

$$-\frac{d\omega}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

prise entre les limites 0 et $R\cos\omega$, ce qui donne

$$\frac{d\omega}{3}\left(R^3-R^3\sin^3\omega\right)$$

Pour avoir le volume total du cylindre compris entre le plan xy et la sphère, il faudra prendre l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{3}\left(R^3-R^3\sin^3\omega\right)$$

entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$ ou deux fois

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{3}\left(R^3-R^3\sin^3\omega\right).$$: or on a

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{3}\left(R^3-R^3\sin^3\omega\right) = \frac{\pi R^3}{3} - 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\omega\, d\omega.$$

$$= \frac{\varpi R^3}{3} - \frac{4}{3}R^3.$$

En prenant cette quantité 4 fois on aura le volume cherché qui est $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{16}{9}R^3$

on voit que le volume retranché de la sphère par le cylindre est égal à $\frac{16}{3} R^3$, quantité rationnelle.

— Surfaces —

L'aire d'une surface de révolution est donnée par la formule $\varpi \int y\, ds$.

application à l'ellipsoïde de révolution —

l'éq. de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

on peut y satisfaire qlq. soit φ ~~par les deux éq.~~ en posant

$$x = a \cos\varphi$$
$$y = b \sin\varphi.$$

L'aire sera donnée par l'intégrale

$$\varpi \int b \sin\varphi\, d\varphi \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$$

prise entre des limites convenables. —

$$\varpi \int b \sin\varphi . d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2\varphi}$$

en posant $\cos\varphi = u$, on a

$$- \varpi b \int du \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) u}$$

C'est une intégrale qu'on sait trouver ; il la intégrera de 0 à ϖ. Ce qui donne

$$-\varpi b \int_{+1}^{-1} du\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2} \quad \text{ou} \quad \varpi b \int_{-1}^{+1} du\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}.$$

$$\int du\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2} = \int \frac{du\,(a^2-(a^2-b^2)u^2)}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}}$$

$$= \frac{a^2\int du}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}} - (a^2-b^2)\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}}$$

$$a^2\int\frac{du}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \text{arc sin}\ u\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$\int\frac{(a^2-b^2)^2 u\,du}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}} = -u\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2} + \int du\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}.$$

on a donc enfin

$$2\int du\sqrt{a^2-c^2u^2} = \frac{a^2}{c}\ \text{arc sin}\ u\frac{c}{a} + u\sqrt{a^2-c^2u^2}$$

Il faudrait prendre cette intégrale entre les limites -1 et $+1$ et doubler pour avoir la surface entière d'ellipsoïde de révolution

Cycloïde —

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u).$$

$$ds = 2a\, du \sin \tfrac{1}{2}u$$

$$\int y\,ds = \int 2a^2 (1-\cos u)\, du \sin \tfrac{1}{2} u = 4a^2 \int \sin^3 \tfrac{1}{2} u\, du$$

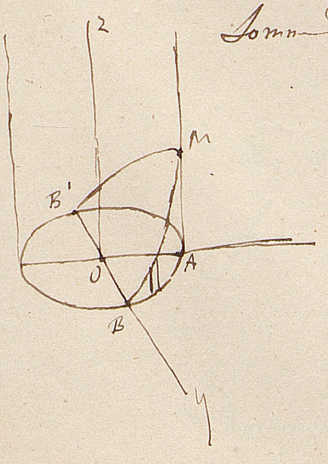
Si l'on pose $\frac{1}{2}u = \varphi$

La surface devient

$$8\pi a^2 \int_0^{4\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi.$$

quantité qu'on sait intégrer.

Ce qui fait le succès de la méthode c'est qu'on peut évaluer tout d'un coup sans faire d'intégration, la surface d'une petite bande de la surface. Le même avantage se présentera toutes les fois que la surface peut se décomposer en éléments infiniment petits du 1er ordre, dont la somme donnera la surface.



Soit par ex. un cylindre droit, par un ~~diag~~ diamètre BB' menons un plan BMB' et proposons nous d'évaluer la surface BAB'M.

Cette surface peut être décomposée en petits rectangles, dont l'expression générale est $z\, dS$

148 r

ds, étant l'arc de la circonférence de base —
Soit R le rayon du cercle — je prends pour axe des
x la droite OX perpend. à OB —

On a

$$R \sin \frac{s}{R} = x.$$

$$z = x \operatorname{tg} \theta.$$

θ étant l'angle du plan de la base avec le plan BMB'.

La surface cherchée sera donnée par

$$\int x \operatorname{tg} \theta . ds .$$

or $\cancel{R} \cos \frac{s}{R} ds = dx$. donc

$$\int x \operatorname{tg} \theta \, ds = \int \frac{x \, dx . \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} = - R^2 \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}.$$

on prendra cette intégrale entre les limites 0 et R
ce qui donnera $R^2 \operatorname{tg} \theta$.

Surface dans le cas le plus général.

Je décompose la projection en éléments infiniment petits rectangulaires $dx\,dy$ sera l'expression d'un de ces petits rectangles; ce rectangle est la base d'un parallélépipède qui rencontre la surface suivant un parallélogramme; on peut remplacer l'élément de la surface par l'élément correspondant du plan tangent en un point de l'élément de la surface, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au ~~premier~~ second — ce petit élément a pour expression $\frac{dx\,dy}{\cos\theta}$

θ étant l'angle du plan tangent avec le plan xoy.

ou bien $\overline{dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}$

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}.$$

il faut faire la somme de tous les éléments — nous ferons d'abord la somme des éléments projetés entre deux parallèles à l'axe des x, dy et y restant constants.

$$dy\int_{x_2}^{x_1} dx\sqrt{1+p^2+q^2}$$

x_2 et x_1 sont des fonctions de y. —

puis $$\int_a^b dy\int_{x_2}^{x_1} dx\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

on pourrait faire la somme autrement ce qui donnerait $$\int_c dx\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}\ldots$$

application à la sphère. —

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$\iint dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$p=-\frac{x}{z}$ $\quad q=-\frac{y}{z}$ $\quad$ on a donc à intégrer

$$R\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

intégrons d'abord par rapport à x en regardant y comme constant.

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{R^2-y^2-x^2}} = \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} = \varpi.$$

on a ensuite

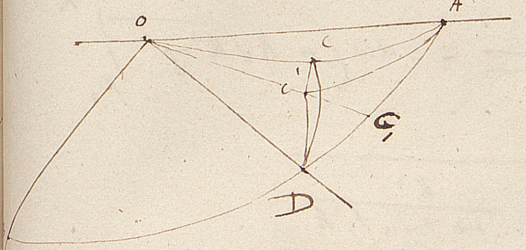
$$\int_{-R}^{+R}\varpi R\,dy = 2\varpi R^2$$ —

en doublant, on obtient pour la surface

$$4\pi R^2$$

Surface d'un triangle sphérique. —

Je prends pour plan des xy le plan d'un des côtés du triangle ; soit AD ce côté ; OA sera l'axe des x. ; soit CAD le triangle donné, qui aussi est un triangle qcq — soit C' la projection du point C. la projection AC' et DC' des deux côtés AC et DC sont deux arcs d'ellipse.



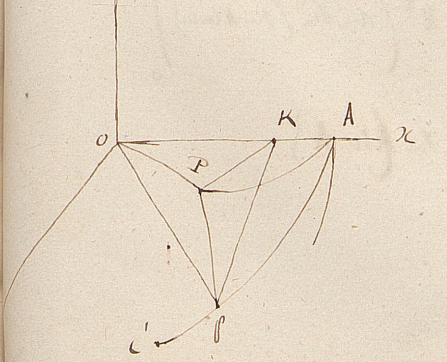
Employons un système de coord. polaires analogue à celui que nous avons déjà pris dans l'évaluation des volumes.

l'élément du plan xoy a pour expression $\rho\, d\omega\, d\rho$, la portion de surface qui se projette sur cet élément a pour expression $\rho\, d\omega\, d\rho \frac{R}{z}$. ou bien

$$\frac{R\rho\, d\omega\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

la surface est $\int \frac{R\rho\, d\omega\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$ prise entre des limites convenables. —

J'intègre par rapport à ρ ; la limite supérieure est R ; la limite inférieure est ρ_1, ρ_1 étant le rayon vecteur de l'ellipse. Je fais une figure à part ; soit AC' l'arc d'ellipse qui est la projection de AC. soit p la projection de P. on a :



$$\rho_1^2 = \overline{op}^2 = R^2 - \overline{Pp}^2$$

Je mène pK perpend. sur OX ; je joins P au point K —

$$Pp = pK \operatorname{tg} A.$$

Car l'angle K = l'angle A du triangle sphérique

150 v

mais $\rho k = \rho_1 \sin \omega$; donc :

$$\rho_1^2 = R^2 - \rho_1 \sin^2\omega \cdot tg^2 A.$$

$$\rho_1 = \frac{R}{\sqrt{1 + \sin^2\omega \, tg^2 A}}.$$

Nous avons donc a prendre

$$d\omega \int_{\rho_1}^{R} \frac{R\rho \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = d\omega \left(- R\sqrt{R^2 - \rho^2} \right)_{\rho_1}^{R}$$

$$= d\omega R \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{1 + \sin^2\omega \, tg^2 A}}$$

$$= \frac{R^2 d\omega \sin\omega \, tg A}{\sqrt{1 + tg^2 A . \sin^2\omega}}.$$

il faut maintenant intégrer cette expression de $\omega = 0$ à $\omega = AOC' = \theta$.

$$R^2 \int_0^\theta \frac{tg A \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{1 + tg^2 A \sin^2\omega}} =$$

$$R^2 \int_0^\theta \frac{tg A \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{1 + tg^2 A - tg^2 A \cos^2\omega}} = R^2 \int_0^\theta \frac{tg A \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - tg^2 A \cos^2\omega}} =$$

$$= R^2 \int_0^\theta \frac{\sin A \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 A \cos^2\omega}} = - R^2 \left(\text{arc sin} (\sin A \cos\omega) \right)_0^\theta$$

$$= - R^2 \text{arc sin} (\sin A \cos\theta) + R^2 \text{arc sin} (\sin A)$$

$$= R^2 \left(A - \text{arc sin} (\sin A \cos\theta) \right).$$

θ est l'angle AOC'_1; ~~Ot~~ l'arc est mesuré par l'arc AC_1 — cette droite $OC'C_1$ est la trace du plan ZOC sur le plan xOy; par suite

$$\sin A \cos\theta = \cos AC'C_1$$

d'où l'intégrale a pour valeur

$$R^2\left(A - \left(\frac{\varpi}{2} - AC'C_1\right)\right).$$

l'autre portion de la surface du triangle aurait pour valeur

$$R^2\left(B - \left(\frac{\pi}{2} - BC'C_1\right)\right).$$

et la somme de ces deux parties est

$$R^2\left(A+B+C - \varpi\right)$$

expression donnée par la géométrie élémentaire.

Intégration des différentielles renfermant plusieurs variables.

Une fonction $\varphi(x,y)$ qui contient deux variables indépendantes a pour différentielle totale

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy$$

Si l'on donne cette différentielle sous la forme

$$Mdx + Ndy$$

M et N désignant des fonctions connues de x et y, la recherche de la fonction primitive formera un problème inverse dont la solution ne sera pas toujours possible — pour s'en assurer remarquons que si l'on a

$$M = \frac{d\varphi}{dx} \qquad N = \frac{d\varphi}{dy}$$

on peut conclure

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$$

et par ces. les fonctions M et N sont assujetties à une équation

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

sans laquelle la fonction φ ne peut exister.

La condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ est d'ailleurs la seule qui soit nécessaire pour que la somme

$$Mdx + Ndy$$

soit une différentielle exacte. Pour le démontrer je vais faire voir comment on peut dans ce cas effectuer l'intégration.

152 v°

Si nous nous proposons de trouver une fonction φ dont la différentielle totale soit

$$Mdx + Ndy$$

nous pouvons remarquer d'abord que l'on doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dx} = M$$

et p.c.s.

$$\varphi = \int M dx.$$

pourvu que dans l'intégration on considère y comme constante; mais cette équation ne détermine pas complètement la fonction φ; car l'intégrale $\int M dx$ est indéfinie, et il reste permis de lui ajouter une ~~constante~~ quantité indépendante de x, c.à.d. une fonction q.q. de y.

Posons donc

$$(a) \quad \varphi = \int_{x_0}^{x} M dx + \psi(y)$$

nous aurons quelque soit $\psi(y)$

$$\frac{d\varphi}{dx} = M.$$

Il suffira de déterminer la fonction $\psi(y)$ par la condition qu'on ait en outre

$$\frac{d\varphi}{dy} = N.$$

Or en prenant la dérivée des deux membres de l'équation (a) par rapport à y on trouve d'après la règle de différentiation sous le signe $\int$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dM}{dy} dx + \frac{d\psi(y)}{dy}$$

et p.c.s. on a

$$N = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dM}{dy} dx + \frac{d\psi(y)}{dy}$$

D'où

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = N - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dM}{dy} dx$$

Pour qu'on puisse trouver une valeur de ψ qui satisfasse à cette condition, il faut et il suffit que le 2e membre soit indépendant de x, et p.cs. que sa dérivée par rapport à x soit nulle; cette dérivée est précisément

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$$

en sorte que la condition

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

que nous avons tout d'abord reconnue nécessaire est encore suffisante pour que l'intégration puisse se faire; lorsque cette équation a lieu, l'éq. (b) fera connaître par une intégration la fonction $\psi(y)$. — (×)

[On] peut remarquer que [la cond]ition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ donne

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx}\,dx = N - N_0$$

[en no]mmant N_0 ce que devient [N] quand on y remplace x [par] x_0; on a alors

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = N_0$$

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} N_0\,dy$$

[en so]rte que

$$[V] = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \int_{y_0}^{y} N_0\,dy$$

Il existe un moyen fort simple de former des fonctions M et N qui remplissent la condition précédente; il suffit en effet de prendre une fonction qcq d'une variable x et d'y remplacer x par $x+y\sqrt{-1}$. — Si l'on a

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1}$$

Prenons les dérivées des deux membres par rapport à x, puis par rapport à y: nous avons

$$\varphi'(x+y\sqrt{-1}) = \frac{dM}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dN}{dx}.$$

$$\sqrt{-1}\,\varphi'(x+y\sqrt{-1}) = \frac{dM}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dN}{dy}$$

et p.cs.

$$\frac{dM}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dx}\sqrt{-1} - \frac{dN}{dx}.$$

Donc

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{dN}{dx}$$

$$\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dx}.$$

153r

Donc $M\,dx - N\,dy$

$N\,dx + M\,dy$

sont des différentielles exactes —

Ex. $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$

on aura $\varphi(x+y\sqrt{-1}) = \frac{1}{(x+y\sqrt{-1})^2} = \frac{x^2-y^2-2xy\sqrt{-1}}{(x^2+y^2)^2}$

donc $M = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $N = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

par suite la différentielle

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

sont intégrables.

on trouve en appliquant la méthode générale

$$\int\frac{(x^2-y^2)dx + 2xy\,dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Extension de la théorie précédente au cas de trois variables.

La différentielle totale d'une fonction $\varphi(x,y,z)$ qui contient trois variables indép. est

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz$$

si l'on se donne cette différentielle sous la forme

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

M, N, P étant des fonctions données de x, y, z

La recherche de la fonction primitive ne sera pas possible en général et les conditions

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \qquad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \qquad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$$

sont évid. nécessaires — je vais prouver qu'elles sont suffisantes et que les supposant remplies on pourra toujours integrer la somme

$$Mdx + Ndy + Pdz.$$

Si nous traitons en effet z comme une constante, l'égalité

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

montre, d'après ce qui précède, qu'il existe une fonction $F(x,y,z)$ dont la différentielle par rapport aux variables x et y est

$$Mdx + Ndy.$$

et l'on a vu qu'une telle fonction est donnée par la formule

$$F = \int_{x_0}^{x} Mdx + \int_{y_0}^{y} N_0 dy$$

N_0 designant ce que devient N quand on y remplace x par x_0 et z étant traité comme une constante pendant les intégrations.

Cette fonction F peut être ~~dite~~ augmentée d'une fonction arbitraire de z, $\psi(z)$. et la somme

$$U = F + \psi(z)$$

aura quel que soit $\psi(z)$, M pour derivée par rapport à x, N pour derivée par rapport à y. il reste donc à déterminer cette fonction inconnue par la condition que la derivée $\frac{dU}{dz}$ soit egale à P. Or on a

$$\frac{dU}{dz} = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{dN_0}{dz}dy + \frac{d\psi(z)}{dz}$$

154 v

Si on la fonction ψ est définie par l'équation

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{dV}{dz} - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dN_0}{dz}\,dy$$

$$= P - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dN_0}{dz}\,dy$$

Pour qu'on puisse en déduire la fonction ψ, il faut et il suffit que le 2e membre soit une fonction de la seule variable z ; égalant donc à zéro, sa dérivée par rapport à x et sa dérivée par rapport à y nous aurons les deux éq. suivantes qui expriment que le problème est possible.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz}.$$

$$\frac{dP}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^2M}{dy\,dz}\,dx + \frac{dN_0}{dz}.$$

et comme $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ par hyp. la seconde de ces éq. devient :

$$\frac{dP}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^2N}{dx\,dz}\,dx + \frac{dN_0}{dz} = \frac{dN}{dz} - \frac{dN_0}{dz} + \frac{dN_0}{dz} = \frac{dN}{dz}$$

En sorte que les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de l'intégrale cherchée sont précisément celles que nous avions trouvées plus haut.

En supposant les conditions remplies, l'éq. qui définit ψ devient

$$\frac{d\psi}{dz} = P - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dN_0}{dz}\,dy = P - \int_{x_0}^{x} \frac{dP}{dx}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dP_0}{dy}\,dy$$

$$= P - (P - P_0) - (P_0 - P_{0,0}) = P_{0,0}$$

en désignant par $P_{0,0}$ ce que devient P quand on y fait $x = x_0$ $y = y_0$; d'après ce résultat on a :

$$\psi(z) = \int_{z_0}^{z} P_{0,0}\, dz$$

$$U = \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} N_0 dy + \int_{z_0}^{z} P_{0,0} dz.$$

La méthode ~~que~~ s'étend sans difficulté à un nombre q.c.q. de variables.

La question que nous venons de résoudre se présente q.q.fois sous une autre forme, et elle est alors susceptible d'une généralisation importante.

Soit $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ une fonction donnée de x de y considérée comme fonction de x et de sa dérivée $\frac{dy}{dx}$; quelle est la condition pour que cette fonction puisse s'intégrer sans qu'il soit nécessaire de spécifier la relation qui lie y à x; de telle sorte que l'on ait :

$$(1) \quad \int F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \varphi(x, y).$$

La fonction φ étant indépendante de la forme ~~algébrique~~ assignée à la fonction de x que représente y, l'équation (1) équivaut

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}$$

et cette relation devant être identique, il faut c.à.d. que la fonction F contienne la dérivée $\frac{dy}{dx}$ au 1r degré et soit f.ct. de la forme $M + N\frac{dy}{dx}$.

On devra avoir alors :

$$M = \frac{d\varphi}{dx} \qquad N = \frac{d\varphi}{dy}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible est exprimée par la relation

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} .$$

Équations différentielles.

On nomme équation différentielle du 1er ordre une équation de la forme

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

entre une variable indépendante x, une fonction inconnue y de cette variable et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de cette fonction. Intégrer une pareille équation, c'est déterminer la fonction qui substituée à y satisfait à l'éq. donnée.

Une même fonction peut satisfaire à une infinité d'équations différentielles différentes. Soit une fonction

$$y = \varphi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x).$$

il est clair qu'avec ces deux équations nous pourrons former une infinité de relations entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, car on peut les combiner ensemble d'une infinité de manières.

Ex.
$$y = x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x \cos x}{\cos\sqrt{y}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{2\sqrt{y}}$$ —

sont autant d'éq. différentielles auxquelles satisfait l'éq. $y = x^2$.

Une même équation différentielle convient à une infinité de fonctions différentes, mais appartenant toutes à une même classe.

Soit $\varphi(x, y, a) = 0$

il est clair que attribuant à a toutes les valeurs possibles, on aura une infinité de fonctions différentes. — Je prends la dérivée

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

éliminant a entre cette équation et la 1re on aura une relation $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

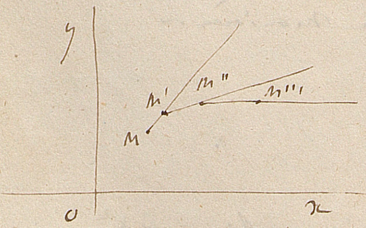
laquelle conviendra à toutes les fonctions $\varphi(x, y, a) = 0$

—

Toute équation de la forme (1) $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ admet toujours une intégrale dans l'expression de laquelle figure une constante arbitraire.

On peut supposer que la relation (1) soit résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et prenne la forme

(a) $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$.



Prenons sur le plan un point M ($x_0 y_0$) arbitraire; (a) donnera la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx}$; soit MM' la direction de la tgte. Le point M' qui est infint voisin de M peut être considéré comme appartenant à la courbe, en négligeant les infint petits du 2e ordre et —; le polygone MM'M''M''' — sera tel qu'en chacun de ses sommets, la direction du côté suivant est précisément ce que devrait être en ce même point la tangente à la courbe cherchée. On voit qu'à la limite, la

polygone devient une courbe qui en tous ses points satisfera à la condition donnée. Or cette courbe passe par un point M qui est tout à fait arbitraire; son équation générale contient p. cons. une constante arbitraire.

Soit une équation diff. donnée

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Supposons qu'on puisse la résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et qu'on ait $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$,

l'équation pourra être mise sous la forme

$$M dx + N dy = 0$$

Il est un cas où l'intégration peut se faire immédiatement. C'est celui où les fonctions M et N satisfont à la condition

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

L'expression $M dx + N dy$

est une différentielle exacte.

Dans le plus grand nombre de cas, le 1er membre de l'équation

$$M dx + N dy = 0$$

157 v

n'est pas une différentielle exacte ; mais on peut toujours lui donner cette propriété, en le multipliant par un facteur convenable —

Il existe un facteur μ tel que

$$\mu(Mdx+Ndy)$$

est une différentielle exacte — (Voyez Sturm).

Non seulement il existe un facteur, mais il en existe un nombre infini ; supposons en effet que

$$\mu(Mdx+Ndy)=dV.$$

En multipliant les deux membres par $\varphi(V)$ c.à.d. par une fonction arbitraire de V, nous aurons

$$\mu\varphi(V)(Mdx+Ndy)=\varphi(V)dV.$$

et comme $\varphi(V)dV$ est évid. une différentielle exacte on voit que le facteur $\mu\varphi(V)$, a, quelle que soit la fonction φ la même propriété que la fonction μ.

On peut démontrer en outre que $\mu\varphi(V)$ est la forme la plus générale du facteur propre à rendre le premier membre intégrable — quel que soit en effet le facteur qui remplit cette condition, on peut le représenter par

$$\mu f(x,y).$$

Supposons donc que le produit

$$\mu f(x,y)(Mdx+Ndy) = \mu f(x,y)$$

soit une differentielle exacte ; je vais prouver que $f(x,y)$ est nécessairement une fonction de V.

Soit en effet

$$f(x,y)\,dV = dU.$$

En vertu de cette equation, si x et y varient de telle sorte que dV soit nul dU sera nul aussi ; donc U restera constant, et p.c. les fonction U et V sont constantes ensemble ; si donc l'une des deux reçoit une valeur déterminée l'autre aura par cela même aussi une valeur déterminée qui ne pourra varier que si la premiere vient à changer. Ce qui revient à dire que U est une fonction de V seulement ; soit

$$U = F(V)$$

on en conclut $\quad dU = F'(V)\,dV.$

et par suite $\quad f(x,y) = F'(V)$

ce qu'il fallait démontrer. —

On conclut du th. précédent que deux multiplicateurs propres à rendre le premier membre d'une équation différentielle intégrable étant connus, leur rapport égalé à une constante donnera une intégrale.

Ces multiplicateurs sont en effet, d'après ce

158 v

qui seraient de la forme

$$\mu f_1(V) \quad \mu f_2(V).$$

leur rapport est $\frac{f_1(V)}{f_2(V)}$ étant une fonction de V, en écrivant qu'il est constant, on exprimera que V lui-même est constant, et l'on aura ainsi ~~l'éq. générale de~~ l'intégrale générale de l'équation proposée.

Reste maintenant à trouver le facteur μ. qui est tel que

$$\mu(Mdx+Ndy) = du.$$

La condition nécessaire et suffisante à cet effet, c'est que

$$\frac{d\mu M}{dy} = \frac{d\mu N}{dx}.$$

qui conduit à

$$N\frac{d\mu}{dx} - M\frac{d\mu}{dy} = \mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right).$$

telle est l'équation qui détermine μ; mais sa résolution offre au moins autant de difficulté que celle de la proposée.

Les cas dans lesquels on peut trouver le facteur sont très restreints. Supposons que ce facteur soit fonction de x seulement. Cherchons quelle condition doit être remplie désignons ce facteur par X. on aura

$$\frac{dMX}{dy} = \frac{dNX}{dx}$$

$$X\frac{dM}{dy} = X\frac{dN}{dx} + N\frac{dX}{dx}.$$

D'où

$$\frac{\frac{dX}{dx}}{X} = \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}.$$

il faut que le 2e membre soit une fonction de x seulement. — Supposons la condition remplie; soit

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \varphi(x)$$

On aura

$$\frac{dX}{X} = \varphi(x)dx$$

$$lX = \int \varphi(x)dx.$$

$$X = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

On aurait un résultat analogue, si le facteur ne devait être fonction que de y seulement.

Appliquons ceci à l'équation

$$dy - (x^2y+1)dx = 0$$

On trouve $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = -x^2$

Donc $l.X = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$

$$X = e^{-\frac{x^3}{3}}$$

et l'équation

$$e^{-\frac{x^3}{3}}dy - (x^2y+1)e^{-\frac{x^3}{3}}dx = 0$$

s'intègre immédiatement, son premier membre étant la différentielle exacte de

$$ye^{-\frac{x^3}{3}} - \int e^{-\frac{x^3}{3}}dx$$

en sorte que la solution générale de l'éq. proposée est :

$$ye^{-\frac{x^3}{3}} - \int e^{-\frac{x^3}{3}}dx = C.$$

Le calcul est plus simple si l'éq. différentielle est mise sous la forme $dy + M dx = 0$.

on a dans cette hypothèse, en supposant que v ne dépend toujours que de x

$$\frac{dv}{dx} = v\frac{dM}{dy}$$

d'où

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{dy}dx.$$

on déduit que $\frac{dM}{dy}$ doit être une fonction de x seule, soit P cette fonction ; on aura $\frac{dM}{dy} = P$

d'où $M = \int P dy = Py + Q.$

Q étant une fonction de x ; il résulte de là que pour que v ne dépende que de x, il faut que l'éq. différentielle proposée soit de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0.$$

P et Q étant des fonctions de x. —

Quelquefois on peut trouver le facteur d'intégrabilité en partageant l'équation en deux parties et cherchant séparément le facteur qui convient à chaque partie. Soit par ex. l'équation

$$\frac{5\,dx}{x} + \frac{3\,dy}{y} = \frac{x^4\,dx}{y^3}.$$

Le 1er membre est intégrable immédiatement; son facteur d'intégrabilité est p.e. l'unité, l'intégrale étant

$$l.\,x^5y^3$$

le facteur le plus général qui puisse rendre le 1er membre une différentielle exacte est:

$$F(x^5y^3)\,;$$

le 2e membre devient intégrable quand on le multiplie par y^3; le facteur le plus général qui partage cette propriété est

$$y^3\,\varphi(x^5).$$

Si donc on peut trouver deux fonctions F et φ telles que

$$y^3\,\varphi(x^5) = F(x^5y^3).$$

la valeur commune de ces deux expressions sera un facteur propre à rendre intégrables les deux membres de l'équation proposée. Il suffit de prendre $\varphi(x^5) = x^5$ et le facteur cherché est y^3x^5.

En effet

$$5y^3x^4dx + 3y^2x^5dy = x^9dx$$

a pour intégrale

$$y^3x^5 = \frac{x^{10}}{10} + C.$$

Soit encore l'équation

$$(ay - bx)(xdy - ydx) + ab(xdy + ydx) = 0$$

la 1re partie du 1er membre devient intégrable si on la multiplie par $\frac{1}{(ay-bx)(x^2+y^2)}$; l'intégrale de cette première partie est alors $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, et le facteur le plus général qui lui convient est

$$\frac{1}{(ay-bx)(x^2+y^2)}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

La seconde partie est intégrable immédiatement, et son intégrale étant xy, le facteur le plus général qui lui convienne est $F'(xy)$; il faut déterminer les deux fonctions F' et φ de telle sorte que

$$\frac{1}{(ay-bx)(x^2+y^2)}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = F'(xy).$$

le second étant une fonction homogène du degré -3 il faut prendre

$$F'(xy) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$$

et l'on a en effet

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(ay-bx)(x^2+y^2)}\,\frac{(ay-bx)(x^2+y^2)}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(ay-bx)(x^2+y^2)}\left(a\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - b\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

et p.c. le facteur est $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$.

L'intégrale de l'équation proposée est :

$$a\sqrt{\frac{y}{x}} + b\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{ab}{\sqrt{xy}} = C.$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(ay+bx-ab)^2 = Cxy.$$

Il ne faut pas croire que ce procédé [illegible] soit toujours, ni même qu'il soit souvent applicable; souvent après avoir trouvé les deux facteurs qui rendent intégrables les deux parties de l'équation, il y aura impossibilité de les égaler.

Soit par exemple l'équation

$$e^{-x}(xdy+ydx) + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$$

le facteur [illegible] propre à rendre la 1re partie intégrable est

$$e^{-x}F(xy)$$

le facteur qui convient à la 2e partie est

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cherchons donc à résoudre l'éq.

$$e^{-x} F(xy) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

dans laquelle F et φ sont deux fonctions inconnues.
Posons pour cela

$$\frac{y}{x} = u \qquad xy = v$$

on déduira $\qquad x = \sqrt{\frac{v}{u}}$

et l'éq. à résoudre devient :

$$e^{-\sqrt{\frac{v}{u}}} = \frac{\varphi(u)}{F(v)}$$

$$-\sqrt{\frac{v}{u}} = l.\varphi(u) - lF(v)$$

équation impossible ; car quelles que soient les fonctions φ et F, la 2e dérivée du 2e membre, prise par rapport à u et par rapport à v est égale à zéro, tandis qu'il n'en est pas de même de la seconde dérivée du 1er membre. —

Équation homogène.

On nomme équation différentielle homogène une équation de la forme $$Mdx + Ndy = 0$$
dans laquelle M et N sont des fonctions homogènes de même degré.

Posons $$M = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad N = x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

L'équation homogène deviendra

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = z \qquad y = xz \qquad dy = xdz + zdx$$

Cette éq. devient :

$$\varphi(z)dx + \psi(z)(xdz + zdx) = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)dz}{\varphi(z) + z\psi(z)}dz = 0$$

et sous cette forme elle a évid. pour intégrale

$$lx + \int \frac{\psi(z)dz}{\varphi(z) + z\psi(z)} = C$$

En revenant les opérations qui ont été faites sur l'éq.

$$Mdx + Ndy = 0$$

on voit que le 1er membre avait, pour devenir une différentielle exacte, été multiplié par

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z) + z\psi(z)} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{x^m x\left(\frac{M}{x^m} + \frac{y}{x}\cdot\frac{N}{x^m}\right)}$$

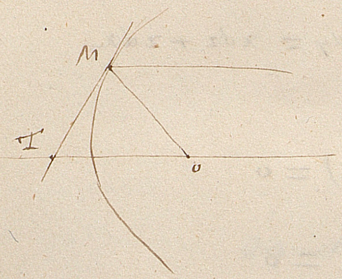
162 v

D'ailleurs l'on vérifie facilement que M et N étant deux fonctions homogènes du même degré, on a

$$\frac{d\dfrac{M}{Mx+Ny}}{dy} = \frac{d\dfrac{N}{Mx+Ny}}{dx}.$$

Le problème suivant conduit à une éq. homogène

Trouver la courbe sur laquelle des rayons lumineux parallèles doivent être réfléchis pour aller concourir en un même point.



Soit O le point où vont concourir, après leur réflexion, les rayons parallèles à l'axe des X. D'après la condition énoncée le triangle OMT est isocèle cette condition s'exprime par l'équation

$$\sqrt{x^2+y^2} = x - y\frac{dx}{dy}.$$

$$dy\sqrt{x^2+y^2} = x\,dy - y\,dx.$$

Le facteur propre à rendre cette éq. intégrable est :

$$\frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\int \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-x)\,dy + y\,dx}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y}$$

On peut quelquefois rendre homogène une équation qui ne l'est pas

$$(a+mx+ny)dx+(b+px+qy)dy=0.$$

(Voyez Sturm) —

Équation linéaire.

On nomme équation linéaire toute équation qui est du 1er degré par rapport aux inconnues y et $\frac{dy}{dx}$. Le type général d'une équation linéaire du 1er ordre est donc

$$(1) \quad \frac{dy}{dx}+Py+Q=0$$

P et Q désignant des fonctions de x.

Pour intégrer posons

$$y=uv$$

u et v étant deux inconnues nouvelles entre lesquelles nous pouvons établir une relation arbitraire. L'éq. proposée devient :

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv+Q=0$$

Posons $\quad \frac{dv}{dx}+Pv=0 \quad (2).$

L'équation se réduit à

$$v\frac{du}{dx}+Q=0 \quad (3)$$

de (2) on tire

$$v = C e^{-\int P dx}$$

et de (3) on déduit

$$u = \int \frac{Q}{v} dx . \quad C' - \int \frac{Q}{v} dx$$

$$u = C' - \frac{1}{C} \int Q e^{\int P dx}$$

et par suite

$$y = C\left(C' - \frac{1}{C} \int Q e^{\int P dx}\right) e^{-\int P dx}.$$

Cette formule renferme en apparence deux constantes C et C', mais en effectuant la multiplication indiquée il n'en reste qu'une seule qui est le produit CC'.

On peut aussi intégrer l'éq. linéaire en cherchant le facteur propre à la rendre une différentielle exacte. L'équation étant mise sous la forme

$$dy + (Py + Q) dx = 0$$

Cherchons s'il existe un facteur X, fonction de x seulement. Ce facteur, s'il existe, devra satisfaire à la condition

$$\frac{dX}{dx} = XP.$$

d'où

$$X = e^{\int P dx}.$$

ainsi donc

~~$e^{\int P dx} dy + \int Q e^{\int P dx} dx =$~~

$$e^{\int P dx} dy + (Py + Q) e^{\int P dx} dx$$

est une différentielle exacte. Son intégrale est :

$$y e^{\int P dx} + \int Q e^{\int P dx} dx = C.$$

résultat qui coïncide avec le précédent ———

Lorsque une équation différentielle contient la dérivée $\frac{dy}{dx}$ à une puissance supérieure à la première, il est en général fort difficile de l'intégrer. On peut conseiller de résoudre l'éq. par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et de la séparer en autant d'équations plus simples qu'il y a de racines. Ce procédé réussit pour l'équation

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

delaquelle on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 \pm \sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}}{2xy}$$

Ce qui donne les deux éq. plus simples

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Les suite les intégrales sont :

$$y^2 - x^2 = C \qquad xy = C'$$

164 v

équation de la forme $F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ —
équation de la forme $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ —
(Voyez Sturm) —

Supposons que l'éq. soit de la forme ordinaire

(1) $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

et qu'on ait pu la mettre sous la forme

(2) $y = \varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$.

Posons $\frac{dy}{dx} = p$ et différentions (2) — il vient

(3). $p = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$.

et si l'on peut intégrer l'éq. (3) qui a lieu entre x et p en éliminant ensuite P entre l'intégrale obtenue et l'équation (2), on aura une intégrale de cette éq. (2) qui contiendra une ~~intégrale générale~~ constante arbitraire et sera p. c. l'intégrale générale.

Si l'équation était mise sous la forme

(1) $x = F(p, y)$.

en la différentiant, on obtient

(2) $1 = \frac{dF}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

remarquant qu'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dy} p$$

on obtient l'équation

$$1 = \frac{dF}{dp} p \frac{dp}{dy} + \frac{dF}{dy} p$$

de laquelle x a entièrement disparu. En intégrant cette équation et éliminant P entre le résultat de cette intégration et l'éq. (2), on obtiendra l'intégrale de cette équation (2).

On peut remarquer que ces méthodes réduisent seulement l'intégration proposée à celle d'une équation de forme très différente sans fournir aucun moyen d'effectuer cette intégration nouvelle.

Cas où l'éq. est de la forme

$$y = x f(p) + \varphi(p).$$

la méthode réussit toujours dans ce cas

Cas plus simple encore:

$$y = px + \varphi(p).$$

L'intégrale générale est

$$y = cx + \varphi(c). \text{ —}$$

l'équation $x + \varphi'(c) = 0$ donne par l'élimination de c entre elle et l'éq. donnée ~~une~~ une solution singulière c. à d. une solution qui n'est pas comprise dans l'intégrale générale.

L'intégrale générale

$$y = cx + \varphi(c)$$

représente une série de lignes droites, l'enveloppe de ces droites a pour éq. le résultat de l'élimination de c entre cette éq. et l'éq.

$$0 = x + \varphi'(c).$$

or il est clair que le nom donné à la lettre qu'on élimine n'exerce aucune influence sur le résultat, donc l'équation de la courbe enveloppe est précisément celle qui résulte de l'élimination de p entre

$$y = px + \varphi(p)$$
$$x + \varphi'(p) = 0$$

c. à d. que la solution trouvée en dehors de l'intégrale générale représente l'enveloppe des droites représentées par celle-ci.

On peut remarquer que le résultat précédent est général ; si une équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y)$$

a pour intégrale générale

$$f(x,y,c) = 0$$

et que cette intégrale pour les diverses valeurs attribuées à la constante c représente une série de courbes, leur courbe enveloppe si elle existe représentera une solution de la même éq. différentielle non comprise dans l'intégrale générale. Soient en effet x et y les coord. d'un point de la courbe enveloppe et $\frac{dy}{dx}$ le coeff. angulaire de sa tg.te ; ce point de la courbe enveloppe est touché par l'une des enveloppées, pour laquelle $x, y, \frac{dy}{dx}$ ont les mêmes valeurs. et l'enveloppée étant par hypothèse une solution de l'éq. différentielle il en résulte que cette éq. est satisfaite par ces trois valeurs et que par suite la courbe enveloppe est une de ses solutions.

(8) 166 r

Equation différentielle d'ordre quelconque.

Si l'on a une relation entre x, y et n constantes arbitraires

$$\varphi(x, y, c_1\ c_2 - c_n) = 0$$

il est clair qu'en différentiant cette équation n fois, on aura n nouvelles relations, qui jointes à l'éq. donnée feront en tout $(n+1)$ equations entre $x, y, c_1\ c_2 - c_n$. Si entre ces $(n+1)$ equations on élimine $c_1\ c_2 - c_n$ il restera une relation entre $x\ y\ \frac{dy}{dx}\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^ny}{dx^n}$.

Réciproquement, soit une relation :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Cette relation a une intégrale générale, contenant n constantes arbitraires.

Intégrer cette équation, c'est chercher une courbe qui y satisfasse ; prenons un point arbitrairement, ce qui revient à prendre une valeur déterminée de y_0 pour une valeur de $x = x_0$ le ce point, je me donne arbitrairement $\frac{dy}{dx}\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ et je vais faire voir que malgré cela je pourrai encore déterminer la courbe.

Supposons qu'à l'equation proposée on substitue la suivante :

$$F\left(x, y, \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\right) = 0$$

alors on se donne

$$x \quad y \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \quad \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \ldots \frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}$$

Comme Δx est constant, cela revient à se donner

$$x \quad y \quad \Delta y \quad \Delta^2 y \quad \Delta^3 y \ldots \Delta^{n-1} y.$$

c'est à dire n ordonnées, qu'on pourra calculer par les formules connues des différences. J'aurai ainsi n points isolés — Au moyen de l'équation donnée je pourrai calculer $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, et par suite j'aurai un nouveau point

Changeons maintenant dans l'éq. $E(x, y, \frac{\Delta y}{\Delta x} \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n})$ x en $x+\Delta x$ — y se change en $y+\Delta y$ et $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ en $\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}}$, ce qui me permettra de déterminer un nouveau point. et ainsi de suite —

Il est évident que si Δx tend vers zéro, ces points formeront une courbe, telle que chacun de ces points [illegible] satisfera à la relation ~~donnée~~ donnée. Donc l'intégrale contient bien n constantes arbitraires, puisque nous pouvons nous donner n points arbitrairement.

Cette démonstration ne peut pas être complètement rigoureuse, car le théorème n'est pas lui même complètement rigoureux; il y a des cas où ce théorème est en défaut, c'est celui des solutions singulières.

Autre démonstration. — Soit la relation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Développons la fonction y suivant les puissances de $x-a$; on aura

$$y = y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a (x-a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{(x-a)^2}{1.2} +$$

$$+ \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_a \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2 \cdots (n-1)} + \cdots$$

quel que soit y, cette quantité est développable généralement en série convergente ; or nous pouvons nous donner arbitrairement

$$y_a \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \cdots \quad \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_a$$

tous les autres coefficients seront déterminés. On voit par là que cette intégrale contient n constantes complètement arbitraires. — (Voir mes cahiers Sturm – Duhamel)

Intégrales intermédiaires

Soit une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

une intégrale intermédiaire de cette éq. est une équation déduite de la proposée entre x, y, $\frac{dy}{dx}$ avec une constante arbitraire.

167 r

Une eq. differentielle du 2e ordre a une infinité d'integrale premiere.

Soit $F\left(x\, y\, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

soit $\varphi(x, y\, c, c') = 0$

l'integrale generale. —

Nous pouvons eliminer successivement c et c' entre les equations $\varphi = 0$ et $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ ce qui nous donnera deux integrales 1res distinctes et chacune d'elles peut être considerée comme l'integrale premiere de l'equation donnée.

Mais on pourra en avoir plus de deux ; car les deux constantes c et c' peuvent être remplacées par d'autres c_1 et c_2 ~~avec lesquelles elles sont~~ liées aux premieres par des relations tout à fait arbitraires

$$c_1 = f(c, c') \quad c_2 = \varphi(c, c').$$

et on pourra eliminer c_1 et c_2 entre $\varphi = 0$ et $d\varphi =$

Si l'on a deux integrales premieres et qu'on elimine entre elles $\frac{dy}{dx}$, on aura l'integrale generale.

Soit l'eq. (1) $y = ax^2 + bx$.

on a (2) $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$. (3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$.

en eliminant a et b entre ces 3 equations on a

(4). $\frac{1}{2} x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$.

J'elimine b entre (1) et (2), puis a entre (1) et (2)

j'obtiens deux integrales du 1er ordre

$$x\frac{dy}{dx} - ax^2 - y = 0 \qquad x\frac{dy}{dx} - 2y - bx = 0$$

si on elimine $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux equations il vient $y = ax^2 + b$

intégrer

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi(x).$$

Quand y n'entre pas dans une équation différentielle, on peut abaisser l'ordre d'une unité.

soit $F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

on pose $\frac{dy}{dx} = p$ et l'éq. devient

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \frac{d^2p}{dx^2}\right) = 0$$

Quand x n'entre pas dans l'éq. différentielle, on peut encore abaisser l'ordre d'une unité en posant

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Car on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\,p$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dy^2}\,p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

Pour tout ceci voir les cahiers — Sturm — Duhamel —

Equation linéaires —

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = V$$

les dérivées ne sont pas multipliées entre elles; y entre au 1er degré —, P_1 P_2 — P_{n-1} P_n sont des fonctions quelconques de x. —

Supposons d'abord que le terme independant de y V soit egal à zéro —

Cette equation jouit de deux propriétés presque evidentes, mais qui n'en sont pas moins très importantes.

1°. si $y = y_1$ est une des solutions $y = C y_1$ satisfera également, C designant une constante arbitraire

2° la somme de plusieurs solutions est une solution en sorte que si $y = y_1$ $y = y_2$ — $y = y_n$ sont des solutions de l'équation

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

sera une solution de l'equation proposée —

on voit d'après cela que la solution generale doit être de la forme $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$.

on peut remarquer qu'il ne peut pas exister des solutions singulières car une solution $y = u$, non comprise dans l'integrale générale pourrait être multipliée par une constante et ajoutée à ~~elle~~ l'integrale générale qui contiendrait alors $(n+1)$ constantes.

Cette demonstration a de l'importance elle nous apprend que quelles que soient les constantes, lorsqu'on a une equation qcq, la connaissance d'une integrale ~~partic~~ particulière ne sert en rien pour trouver l'intégrale

générale ; mais quand on a une ~~intégrale singulière~~ équation linéaire, et chaque solution particulière est une par[tie] de l'intégrale générale

La réciproque est vraie —

(1) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 - \quad + C_m y_m$

est l'intégrale d'une équation linéaire. En effet pour trouver l'équation différentielle, il faut différentier m fois et éliminer les m constantes entre les m équations obtenues et l'équation (1).

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + - \quad + C_m \frac{dy_m}{dx} \text{ Eq}$$

$$\Sigma_0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} =$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = C_1 \frac{d^m y}{dx^m} + \quad + C_m \frac{d^m y_m}{dx^m}.$$

Pour cela, nous résoudrons les m pres équations, ce qui nous donnera $C_1\ C_2 - \quad C_m$, et nous porterons ces valeurs dans la dernière ; qui deviendra une équat. linéaire, car les valeurs de $C_1\ C_2 - C_m$ sont des fonctions linéaires de $\frac{dy}{dx}\ \frac{d^2y}{dx^2} - \quad \frac{d^m y}{dx^m}$.

Je dis de plus que les m 1res équat. pourront toujours être résolues, si les constantes $C_1\ C_2 - C_m$ sont bien distinctes ; une équation contient m

Constante, quand pour une valeur qcq. de x on peut prendre arbitrairement y et les $(n-1)$ premières dérivées. Il est clair que si cette condition est remplie la résolution sera possible.

Equation linéaire à coefficients constants.

L'équation:

(1) $$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_n y = 0$$

peut s'intégrer quand les coefficients sont constants. Posons en effet $y = e^{\alpha x}$. Le 1er membre deviendra

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \cdots + A_n\right) = e^{\alpha x}\varphi(\alpha) = 0$$

si donc on prend pour α une des racines de l'équation

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \cdots + A_n = \varphi(\alpha) = 0$$

la proposée sera satisfaite. Soient $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ les racines, l'intégrale générale sera

(2). $$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Si les racines $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ sont ~~constantes~~ inégales, l'expression précédente contient bien réellement n constantes. (en l'entendant ainsi qu'il a été dit).

En effet on déduit de l'équation (2)

$$(A)\quad\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = C_1\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + C_2\alpha_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_m\alpha_m e^{\alpha_m x} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = C_1\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} + C_2\alpha_2^2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_m\alpha_m^2 e^{\alpha_m x} \\ \cdots \\ \dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m}} = C_1\alpha_1^{m-1} e^{\alpha_1 x} + C_2\alpha_2^{m-1} e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_m\alpha_m^{m-1} e^{\alpha_m x} \end{cases}$$

Si dans l'équation (2) et dans les équations (A), on considère $C_1\ C_2 \ldots C_m$ comme inconnues, afin de savoir s'il est possible de les déterminer de manière à assigner aux premiers membres une valeur arbitraire, on voit qu'elles sont de la forme

$$K_1 = P_1 C_1 + P_2 C_2 + \cdots + P_m C_m$$
$$K_2 = P_1\alpha_1 C_1 + P_2\alpha_2 C_2 \cdots + P_m\alpha_m C_m$$
$$K_3 = P_1\alpha_1^2 C_1 + P_2\alpha_2^2 C_2 + \cdots + P_m\alpha_m^2 C_m$$
$$K_m = P_1\alpha_1^{m-1} C_1 + P_2\alpha_2^{m-1} C_2 + \cdots + P_m\alpha \ldots$$

Pour les résoudre, ajoutons les après les avoir multipliées par des facteurs constants $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots \lambda_m$, il viendra en posant

$$\lambda_1 + x\lambda_2 + x^2\lambda_3 + \cdots + x^{m-1}\lambda_m = \psi(x)$$

$$K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2 + \cdots + K_m\lambda_m = P_1C_1\psi(\alpha_1) + P_2C_2\psi(\alpha_2) \cdots + P_mC_m\psi(\alpha_m)$$

Si donc on choisit la fonction ψ dont les coefficients sont arbitraires de telle sorte que les

170v

racines de l'éq. $\psi(x)=0$ soient

$\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_m \ldots$, on aura

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_m\lambda_m = C_1 P_1 \psi(\alpha_1)$$

et l'on déduira pour C_1 une valeur dont le dénominateur n'est pas nul. On aura de même $C_2\ C_3 \ldots$ donc la méthode ne sera en défaut que si quelques unes des racines $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$ étaient égales. —

Si deux racines $\alpha_1\ \alpha_2$ sont imaginaires

$$\alpha_1 = p + q\sqrt{-1}$$
$$\alpha_2 = p - q\sqrt{-1}$$

on peut transformer la partie de l'intégrale qui leur correspond et lui donner une forme réelle. On a en effet

$$e^{\alpha_1 x} = e^{px+qx\sqrt{-1}} = e^{px}(\cos qx + \sqrt{-1}\sin qx).$$
$$e^{\alpha_2 x} = e^{px-qx\sqrt{-1}} = e^{px}(\cos qx - \sqrt{-1}\sin qx).$$

Par suite

$$C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} = e^{px}\cos qx\,(C_1+C_2) + e^{px}\sin qx\,(C_1-C_2)\sqrt{-1}$$

et par suite en posant

$$C_1 + C_2 = M$$
$$(C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N.$$

les deux termes deviennent:

$$e^{px}(M\cos qx + N\cos qx).$$

Lorsque deux ou plusieurs racines $\alpha_1, \alpha_2 \;—\; \alpha_m$ deviennent égales, les termes qui leur correspondent dans l'intégrale se confondent, et celle-ci n'a plus le nombre voulu de constantes arbitraires —; il faut donc trouver de nouvelles intégrales particulières pour la compléter.

Reprenons l'équation :

$$\frac{d^m e^{\alpha x}}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} e^{\alpha x}}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} e^{\alpha x}}{dx^{m-2}} + \dots + A_m e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\varphi(\alpha)$$

Cette équation étant une identité, j'ai le droit de différentier les deux membres par rapport à α, α désignant ici un nombre arbitraire, que je fixerai plus tard.

Il viendra

$$\frac{d^m x e^{\alpha x}}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} x e^{\alpha x}}{dx^{m-1}} + \dots \qquad A_m x e^{\alpha x} = \alpha x e^{\alpha x}\varphi(\alpha) + e^{\alpha x}\varphi'(\alpha)$$

Or le second membre est nul, si α désigne une racine double de l'équation

$$\varphi(\alpha) = 0$$

et par suite $x e^{\alpha x}$ est une solution de la proposée.

En différentiant une 2e fois par rapport à α on verra que si α est une racine triple, c. à d. si l'on a

$$\varphi(\alpha) = 0 \qquad \varphi'(\alpha) = 0 \qquad \varphi''(\alpha) = 0$$

$x^2 e^{\alpha x}$ est solution de l'éq. proposée, et en

171v

Continuant de même, on verra que si n racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ devenaient égales entre elles, les termes qui leur correspondent devront être remplacés par

$$e^{\alpha_1 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \quad C_n x^{n-1}\right).$$

---

on peut arriver par une autre méthode due à d'Alembert. (Voyez Sturm, par Duhamel).

---

on peut arriver au même résultat par la méthode de la variation des constantes arbitraires. —

Cas des racines imaginaires égales. —

Soit a_1 une racine imaginaire triple, et a_2 sa conjuguée. La valeur de y correspondant à ces deux racines multiples sera

$$y = e^{a_1 x}\left(C + C'x + C''x^2\right) + e^{a_2 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) + \text{—}$$

$$y = e^{(p+q\sqrt{-1})x}\left(C + C'x + C''x^2\right) + e^{a_2 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) + \text{—}$$

$$y = e^{px}\left\{\left(C + C'x + C''x^2\right)\left(\cos qx + \sqrt{-1}\sin qx\right) + \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)\left(\cos qx - \sqrt{-1}\sin qx\right)\right\}$$

$$y = e^{px}\left(\left(M + Nx + Px^2\right)\cos qx + \left(M' + N'x + P''x^2\right)\sin qx\right) + \text{—}$$

Calcul intégral

Intégration de l'équation linéaire avec 2e membre

(1). $$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = X.$$

A_1 A_2 … A_m X étant des fonctions de x. — L'intégrale de l'éq. (1) peut se déduire de l'intégrale générale de l'éq.

(2) $$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \quad + A_m y = 0$$

—

1° Méthode de Lagrange, par la variation des constantes. — Soit

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

l'intégrale générale de l'éq. (2), C_1 C_2 … C_m étant des constantes. — On peut substituer à ces constantes des fonctions de x telles que l'on obtienne l'intégrale générale de l'équation (1). On peut en avoir une détermination qui n'exige que des quadratures. — (Voyez Sturm - Duhamel). — Dans ce cas l'intégrale générale de l'éq. (1), aura la forme

$$y = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \quad + C'_m y_m + \psi(x)$$

C'_1 C'_2 … C'_m étant des constantes —

—

172v

Cas où l'on connait (n-1) solutions de l'eq. sans second membre —

Cas où l'on connait (n-2) solution de l'eq. sans second membre —

En general cas où l'on connait seulement ~~(n-p)~~ p solutions de l'equation sans second membre —

(Voyez Sturm - Duhamel) —

Calcul intégral —

Cas où l'on connaît une solution particulière de l'équation avec second membre —

Lorsqu'on connaît une intégrale particulière de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \quad + A_m y = T$$

on peut ramener la recherche de son intégrale à celle de l'intégrale générale de l'éq. (2)

$$(2). \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \qquad + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

Soit en effet u cette intégrale particulière ; on forme $y = u + z$ dans l'éq. (1) et il vient

$$\frac{d^m z}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \qquad + A_{m-1} \frac{dz}{dx} + A_m z = 0.$$

On est donc ramené à la recherche de l'intégrale générale de l'équation (2).

1er Cas. — soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \qquad + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = a x^n + b x^{n-1} - + p x + q.$$

$A_1, A_2 - A_{m-1}\ A_m - a, b - p\ q$ étant constants.

2e Cas.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \qquad + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y = C e^{\alpha x}.$$

tous les coefficients étant constants.

Posons $y = K e^{\alpha x}$ et substituons

il vient, en supprimant $e^{\alpha x}$ qui est facteur commun aux deux membres,

$$k(\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \dots + A_{n-1}\alpha + A_n) = C$$

d'où nous tirerons pour k une valeur numérique, et l'integration sera ramenée à l'integration de l'equation sans second membre —

Nous pourrions integrer toute equation analogue à celle que nous venons d'étudier, mais dont le 2e membre serait la somme de quantités de même forme que celles que nous avons vues. Soit par exemple :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = Ce^{\alpha x} + C'e^{\alpha' x} + C''e^{\alpha'' x} + ax^n + bx^{n-1} + \dots px + q$$

supposons que le 2e membre ne contienne que $Ce^{\alpha x}$; soit y_1 la solution particulière à cette equation, solution que nous savons trouver — Soient de même y_2 y_3 y_4 les solutions particulières de l'equation dans le cas où le 2e membre se réduirait à $C'e^{\alpha' x}$ $C''e^{\alpha'' x}$ et à $ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q$ — solutions que nous pouvons trouver. il est bien clair que $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ sera une solution particulière de l'equation donnée. —

Il est clair que ceci s'applique au cas où α_1 et α seraient imaginaires auquel cas on aurait

$$Ce^{\alpha x} + C'e^{\alpha' x} = e^{\gamma x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

On saura donc résoudre les equations à coefficients

Constant dont le second membre est de la forme

$$e^{px}(A\cos qx + B\sin qx). —$$

Cette forme comprend la suivante

$$A\cos px + B\sin qx.$$

Cette méthode se trouve quelquefois en défaut. Soit par exemple l'éq:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x.$$

Posons $y = Ke^x$ et substituons; il vient:

$$Ke^x - 3Ke^x + 2Ke^x = e^x$$

équation qui se réduit à $K \times 0 = 1$.

Ceci arrivera toutes les fois que le 2e membre est une solution de l'équation sans second membre. — Soit encore:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x.$$

On a $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

Recherche des solutions particulières des équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ke^{x\sqrt{-1}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ke^{-x\sqrt{-1}}$$

Pour la 1re, je pose $y = Ke^{x\sqrt{-1}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -Ke^{x\sqrt{-1}}$

Substituant dans l'équation le 1er membre devient nul; on ne peut pas encore déterminer K —

Reprenons l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x.$$

La difficulté vient de ce que e^x est une solution du second membre égalé à zéro. Au lieu de e^x, mettons e^{mx}, nous aurons

$$(2). \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{mx}.$$

La difficulté disparaîtra, et nous ferons tendre ensuite m vers l'unité. Soit $y = ke^{mx}$.

Substituant dans (2), on déduit $k = \frac{1}{m^2-3m+2}$

Par suite la solution générale de (2) est

$$y = \frac{e^{mx}}{m^2-3m+2} + Ce^x + C'e^{2x}$$

et il faut dans cette intégrale faire tendre m vers l'unité. Si l'on fait $m = 1$, la valeur de y est infinie. Mais faisons $C = -\frac{C_1}{m^2-3m+2}$, ce qui est permis évidemment,

$$y = \frac{e^{mx}}{m^2-3m+2} - \frac{C_1 e^x}{m^2-3m+2} + C'e^{2x}$$

Pour $x = 1$, deux termes deviennent infinis ; et l'on comprend que leur différence pourra être finie. La valeur de y prend donc la forme

$$y = \frac{e^{mx} - C_1 e^x}{m^2-3m+2} + C'e^{2x}$$

Calcul intégral

quand m tend vers 1, le dénominateur tend vers zéro. Mais C_1 étant arbitraire je peux poser $C_1 = \varphi(m)$, en assujettissant cette fonction à devenir égale à 1 pour $m = 1$, c'est-à-dire qu'on aura $\varphi(1) = 1$; j'aurai donc

$$y = \frac{e^{mx} - \varphi(m) e^{x}}{m^2 - 3m + 1} + C' e^{2x}$$

et d'après les conditions, quand on fera $m = 1$, le premier terme prend la forme $\frac{0}{0}$; prenant la dérivée des deux termes du rapport, par rapport à m, il viendra

$$y = \frac{x e^{mx} - \varphi'(m) e^{x}}{2m - 3} + C' e^{2x}.$$

$$y = \frac{x e^{x} - \varphi'(1) e^{x}}{-1} + C' e^{2x}$$

$\varphi'(1)$ est tout à fait arbitraire ; car $\varphi(m)$ n'est assujettie qu'à cette seule condition $\varphi(1) = 1$; on a donc pour l'intégrale générale de y

$$y = e^{x}\left(\varphi'(1) - x\right) + C' e^{2x}$$

ou $$y = e^{x}(A - x) + C' e^{2x}.$$

Prenons le second exemple

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$ —

et au lieu de considérer cette équation, prenons la suivante

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos nx$

Pour satisfaire à cette équation je pose $y = B\cos nx$

et l'on déduit $B=\frac{1}{1-n^2}$.

l'intégrale générale de (2) est alors

$$y=\frac{\cos nx}{1-n^2}+C\cos x+C'\sin x$$

Pour $n=1$, y devient infini — posons comme tout à l'heure

$$C=-\frac{C_1}{1-n^2}$$

il vient

$$y=\frac{\cos nx - C_1\cos x}{1-n^2}+C'\cos x$$

On peut bien regarder C_1 comme une fonction de n, $\varphi(n)$ assujettie à la seule condition de devenir égale à l'unité pour $n=1$

$$y=\frac{\cos nx-\varphi(n)\cos x}{1-n^2}+C'\cos x$$

Pour $n=1$ la valeur prend la forme $\frac{0}{0}$

prenons la dérivée par rapport à n, et faisons $n=1$

il vient

$$y=\frac{x\sin x}{2}+A\sin x+C'\cos x.$$

L'application de cette méthode peut presenter quelquefois un peu plus de difficulté comme dans l'exemple suivant:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

(ici e^x est une solution du second membre égalé à zero — mais xe^x est aussi une solution du second membre égal à zero).

Considérons l'équation

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{mx}$$

et posons $y = Ke^{mx}$, on déduit $K = \frac{1}{(m-1)^2}$

par suite

$$y = \frac{e^{mx}}{(m-1)^2} + Ce^x + C'xe^x$$

est l'intégrale générale de l'eq. (2). — Pour $m=1$ on a l'infini; posons comme precedemment

$$C = -\frac{C_1}{(m-1)^2}.$$

et considerons C_1 comme une fonction arbitraire de m, assujettie à la seule condition de devenir égale à 1 pour $m=1$; nous avons

$$y = \frac{e^{mx} - \varphi(m)e^x}{(m-1)^2} + C'xe^x.$$

~~je prends la dérivée~~ pour $m = 1$, le 1er terme

177 v

prend la forme $\frac{0}{0}$; prenons les dérivées par rapport à n des deux termes ; il vient

$$y = \frac{xe^{nx} - \varphi'(n)e^x}{2(n-1)} + C'xe^x.$$

Pour $n=1$, la valeur de y est encore égale à l'infini ; nous [illegible] recours au troisième terme — posons

$$C' = -\frac{\psi(n)}{(n-1)^2}$$

il viendra

$$y = \frac{e^{nx} - \varphi(n)e^x - \psi(n)xe^x}{(n-1)^2}.$$

Pour $n=1$, cette valeur prend la forme $\frac{0}{0}$, si $\psi(n) = 0$ pour $n=1$.

prenant la dérivée des deux termes ; il vient

$$y = \frac{xe^{nx} - \varphi'(n)e^x - \psi'(n)xe^x}{2(n-1)}$$

Pour $n=1$, cette fraction devient $\frac{0}{0}$, si

$$\varphi'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \psi'(1) = 1.$$

φ et ψ sont d'ailleurs complètement arbitraires ; elles sont assujetties aux seules conditions $\varphi(1) = 1$ $\quad \varphi'(1) = 0$

$\psi(1) = 0$ $\quad \psi'(1) = 1$

si on prend la dérivée par rapport à n, une 2e fois on a

$$y = \frac{x^2e^{nx} - \varphi''(n)e^x - \psi''(n)xe^x}{2}$$

$\varphi''(n)$ et $\psi''(n)$ sont arbitraires — si on fait $n=1$ on a

$$y = e^x(A + Bx + Cx^2)$$

Calcul intégral —

Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$(1)\quad (ax+b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 (ax+b)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + A_2(ax+b)^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots\quad A_{m-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

Cette équation ne diffère pas essentiellement d'une éq. linéaire à coefficients constants. Considérons en effet une équat. linéaire à coeff. constants

$$(2)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots\quad + P_{m-1}\frac{dy}{dx} + P_m y = 0$$

et posons $e^x = x'$, et considérons y comme fonction de x'.

on aura
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'}x'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx'}x' + \frac{d^2y}{dx'^2}x'^2 = \left(\frac{dy}{dx'} + x'\frac{d^2y}{dx'^2}\right)x'$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx'} + x'\frac{d^2y}{dx'^2}\right)x' + \left(2\frac{d^2y}{dx'^2} + x'\frac{d^3y}{dx'^3}\right)x'^2 \dots$$

Substituons ces valeurs dans l'éq. (2), il viendra une équation qui aura la même forme que l'équation (1), avec cette seule différence que le binôme $(ax+b)$ sera remplacé par x'. Si nous posons ensuite $x' = ax_1 + b$ nous retrouverons l'équation donnée en premier. On aura

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{1}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx_1^2}\cdot\frac{1}{a^2} \quad —$$

Pour intégrer l'éq. (1), nous poserons

$$y = (ax+b)^\alpha.$$

Cela correspond à la valeur $y = e^{\alpha x}$ que nous

Posons pour intégrer une équation linéaire à coeff. constants — on a l'équation

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m+1)a^m + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)a^{m-1} + \ldots + A_{m-1}a\alpha + A_m = 0$$

soient $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$ les racines de cette équation; l'intégrale générale sera

$$y = C_1(ax+b)^{\alpha_1} + C_2(ax+b)^{\alpha_2} + \ldots + C_m(ax+b)^{\alpha_m}$$

$C_1\ C_2 \ldots C_m$ étant m constantes arbitraires. —

Cas des racines imaginaires — soient

$$\alpha_1 = p+q\sqrt{-1} \qquad \alpha_2 = p-q\sqrt{-1}$$

on aura

$$y = C_1(ax+b)^{p+q\sqrt{-1}} + C_2(ax+b)^{p-q\sqrt{-1}} + C_3(ax+b)^{\alpha_3} + \ldots C_m(ax+b)^{\alpha_m}$$

mais $C_1(ax+b)^{p+q\sqrt{-1}} + C_2(ax+b)^{p-q\sqrt{-1}} = C_1 e^{(p+q\sqrt{-1})l(ax+b)} + C_2 e^{(p-q\sqrt{-1})l(ax+b)} =$

(en posant $ax+b = e^{l(ax+b)}$.)

$$= C_1 e^{p\,l(ax+b)}\left\{\cos q\,l(ax+b) + \sqrt{-1}\sin q\,l(ax+b)\right\} + C_2 e^{p\,l(ax+b)}\left(\cos q\,l(ax+b) - \sqrt{-1}\sin q\,l(ax+b)\right)$$

$$= e^{p\,l(ax+b)}\left(A\cos q\,l(ax+b) + B\sin q\,l(ax+b)\right).$$

$$= (ax+b)^p\left(A\cos q\,l(ax+b) + B\sin q\,l(ax+b)\right)$$

Cas des racines égales. Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2$

Posons $y = (ax+b)^\alpha$, et substituons dans l'éq. proposée. il vient:

$$(ax+b)^m \frac{d^m (ax+b)^\alpha}{dx^m} + A_1 (ax+b)^{m-1} \frac{d^{m-1}(ax+b)^{\alpha-1}}{dx^{m-1}} + \dots + A_m (ax+b)^\alpha$$

$$= (ax+b)^\alpha \varphi(\alpha).$$

Cette équation est une identité; elle a lieu quel que soit α; pour que cette équation soit vérifiée, il n'est pas du tout nécessaire que α soit une racine de l'éq. $\varphi(\alpha)=0$. Nous pouvons différentier les deux membres par rapport à α. nous aurons

$$(ax+b)^m \frac{d^m (ax+b)^\alpha l(ax+b)}{dx^m} + A_1 (ax+b)^{m-1} \frac{d^{m-1}(ax+b)^\alpha l(ax+b)}{dx^{m-1}} + \dots$$

$$\dots + A_m (ax+b)^\alpha l(ax+b) = (ax+b)^\alpha l(ax+b)\varphi(\alpha) + (ax+b)^\alpha \varphi'(\alpha).$$

Si l'on attribue à α la valeur de la racine double on aura une solution; donc

$$y = (ax+b)^\alpha l(ax+b)$$

est une solution de l'équation; il résulte de là:

$$y = (ax+b)^\alpha \left(C_1 + C_2 l.(ax+b)\right) + C_3 (ax+b)^{\alpha_3} + \dots$$

On pourrait aussi trouver ce que devient dans ce cas l'intégrale générale, en employant la méthode de D'alembert. (Voyez Sturm). —

179 v

Intégration par séries

Equation différentielles simultanées

Un système d'équation simultanées peut toujours être ramené à une seule équation à une inconnue.

Considérons par exemple deux équations à trois variables.

$$f\left(x, y \frac{dy}{dx} - \frac{d^n y}{dx^n}, z \frac{dz}{dx} - \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

$$f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx} - \frac{d^p y}{dx^p}, z \frac{dz}{dx} - \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0$$

On conçoit que ces deux équations déterminent y et z en fonction de x ; proposons nous d'éliminer z par exemple (Voir mon Cahier de M. Vieille).

Réciproquement une seule équation à une inconnue peut toujours être remplacée par un système d'éq. simultanées.

Soit une équation différentielle

$$f\left(x, y \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Posons $\frac{dy}{dx} = y'$ $\frac{dy'}{dx} = y''$ $\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}$

l'équation proposée sera remplacée par le système proposé

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y' \\ \frac{dy'}{dx} = y'' \\ \frac{dy''}{dx} = y''' \\ \quad \cdots \\ \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{n-1} \\ f\left(x, y, y' y'' - y^{(n-1)}, \frac{dy^{n-1}}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

180 v

y' y'' — $y^{(n-1)}$ étant considérées comme des nouvelles inconnues — nous aurons autant n équations et n inconnues.

Soit par exemple

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Posons $\frac{dy}{dx} = z$ $\frac{dz}{dx} = u$.

l'équation sera remplacée par le système suivant

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = u.$$

$$\frac{du}{dx} + 2xu + 4xz + y = 0.$$

Le problème revient à trouver trois inconnues y, z, u au moyen de trois équations.

Il en serait de même si l'on avait plusieurs équations simultanées, en supposant que le nombre des inconnues surpasse d'une unité le nombre des équations. Un pareil système peut toujours être remplacé par un système d'équations simultanées du 1er ordre (Voir le cours de M. Vieille).

Soient par exemple

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, z\ \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z\ \frac{dz}{dx}\ \frac{d^2z}{dx^2}\ \frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0$$

Posons: $\frac{dy}{dx} = y'$ $\frac{dz}{dx} = z'$ $\frac{dz'}{dx} = z''$

le système des deux équations données est remplacé par le système des équations simultanées du 1er ordre

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{dz}{dx} = z'$$

$$\frac{dz'}{dx'} = z.$$

$$F\left(x, y, y', \frac{dy'}{dx'}, z, z' z''\right) = 0$$

$$\varphi\left(x, y, y', z, z' z'' \frac{dz''}{dx}\right) = 0$$

nous avons 5 equat. et 5 inconnues; et dans ces équations il n'y a plus de dérivées d'un ordre supérieur au premier.

Le plus souvent on ramène les systemes d'équations simultanées qcq. à un autre système dont toutes les dérivées ne soient pas d'un ordre sup. au premier. En supposant les équations résolues par rapport aux dérivées, leur type sera

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1\ x_2 - \ x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1\ x_2 - \ x_n\ t).$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1\ x_2 - \ x_n, t).$$

il n'y a pas d'équations à une inconnue ni de système d'équations qui ne puisse se ramener à ce dernier.

181v

Principes généraux sur l'intégration des équations. —

Supposons que nous ayons seulement 3 éq. et 4 inconnues.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, u)$$

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, u)$$

$$(3) \quad \frac{du}{dx} = f_3(x, y, z, u).$$

Supposons que nous développions y par la série de Taylor nous aurons

$$y = y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a (x-a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{—}$$

or si on se donne pour $x = a$ les valeurs de $y, z,$ et u on pourra calculer tous les nombres du développement. En effet $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ est donné par l'éq. (1); $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a$ se calculera en différentiant (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f_1 + \frac{df_1}{dz} f_2 + \frac{df_1}{du} f_3$$

on connaîtra donc $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de y_a z_a u_a — et ainsi de suite — Ce développement contient donc 3 constantes qui sont les valeurs y_a z_a u_a de y z u correspondantes à $x = a$.

On aurait de même le développement qui donne z, et celui qui donne u. — Nous aurons donc trois équations intégrales, contenant chacune les 3 mêmes constantes; si l'on suppose ces éq. résolues par rapport aux constantes, nous aurons

$$c = F_1(x, y, z, u) \quad c' = F_2(x, y, z, u) \quad c'' = F_3(x, y, z, u)$$

Etant donné un système de 3 équat. simultanées du 1er ordre, comment reconnaître qu'une équation

(α). $C = \varphi(x, y, z, u)$

est ou n'est pas une intégrale du système donné. (x)

(x) Dire que $\varphi(x, y, z, u)$ est une [...]tion du système cela signifie que si x, y, z, u [var]ient de manière à satisfaire aux éq. (1) (2) (3) la fonction φ restera constante.

~~Supposons que α soit une intégrale du système précédent~~. En différentiant on aura donc

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} = 0.$$

Or puisque cette fonction est solution du système donné, remplaçant ~~y, z, u~~ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dz}{dx}$ $\frac{du}{dx}$ par leur valeur, on aura

(β). $$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} f_1 + \frac{d\varphi}{dz} f_2 + \frac{d\varphi}{du} f_3 = 0.$$

Cette équation doit être nulle identiquement: autrement elle établirait une relation entre les variables $x\ y\ z\ u$ et on ne pourrait pas prendre des valeurs arbitraires de y, z, u pour une valeur particulière de x. —

Réciproquement. Si une fonction $\varphi_1(x, y, z, u)$ satisfait identiquement à (β), en égalant cette fonction à une constante, on aura une intégrale du système. —

182 v

Occupons nous maintenant de l'intégration de ces équations. Soit le système

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V$$

$$\frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V'$$

$$\frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V''$$

P Q R V sont des fonctions de x seulement.

Supposons d'abord que $V=0$ $V'=0$ $V''=0$.

Si y_1 z_1 u_1, forment un système de valeurs,

y_2 z_2 u_2 — un 2e système

y_3 z_3 u_3 — un 3e système.

on aura une solution en prenant

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$z = z_1 + z_2 + z_3$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

on aura encore une solution en prenant

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3$$

La vérification se fait comme pour les éq. linéaires à une seule inconnue. — Ce dernier système sera l'intégrale générale.

Supposons P Q R constants — posons

$$y = e^{mx} \quad z = ae^{mx} \quad u = be^{mx}:$$

on aura

$$m + P + Qa + Rb = 0$$
$$P' + (Q' + m)a + R'b = 0$$
$$P'' + Q''a + (R'' + m)b = 0.$$

Ces 3 équations serviront à déterminer m; quand on aura éliminé a et b, on aura une équat. du 3 degré en m, qui nous donnera trois valeurs

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3.$$

les valeurs correspondantes de a et b sont

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3$$
$$b_1 \quad b_2 \quad b_3$$

on aura par suite

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad z_1 = a_1 e^{m_1 x} \quad u_1 = b_1 e^{m_1 x}$$
$$y_2 = e^{m_2 x} \quad z_2 = a_2 e^{m_2 x} \quad u_2 = b_2 e^{m_2 x}$$
$$y_3 = e^{m_3 x} \quad z_3 = a_3 e^{m_3 x} \quad u_3 = b_3 e^{m_3 x}$$

et l'intégrale générale sera

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}.$$
$$z = C_1 a_1 e^{m_1 x} + C_2 a_2 e^{m_2 x} + C_3 a_3 e^{m_3 x}$$
$$u = C_1 b_1 e^{m_1 x} + C_2 b_2 e^{m_2 x} + C_3 b_3 e^{m_3 x}$$

183v

Car on l'equation du 3e degré en m aurait des racines egales. —

Si on appliquait alors aux eq. données la methode d'elimination, on arriverait à une equation lineaire en y qui serait du 3e ordre, et qui aurait deux racines egales — soit m_1 la valeur commune des deux racines; on aurait une valeur $y = e^{m_1 x}$ et une autre de la forme $y = xe^{m_1 x}$. — on portera cette valeur dans l'eq.

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = 0$$

et dans celle qu'on deduirait de celle là en la differentiant on aurait ainsi deux equations qui donneraient les valeurs de z et u correspondantes à cette valeur $y = xe^{m_1 x}$; on aurait ainsi un systeme satisfaisant aux equations — mais l'eq. en m en ayant fait connaître deux autres correspondants aux valeurs m_1 et m_2, on aura facilement l'intégrale générale.

Cas où les équations ont un 2e membre —

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V \\ &\frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V' \\ &\frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V'' \end{aligned}\right.$$

Soient

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$
$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3$$

l'intégrale des équations sans 2e membre ; on pourra la regarder comme l'intégrale des eq. avec 2e membre en considérant C_1 C_2 C_3 comme des fonctions de x convenables. On les déterminera comme dans le cas des eq. linéaires à une seule inconnue. —

Il est clair que la méthode qui s'applique ici encore lors même que les coefficients $P\ Q\ R$ $P'\ Q'\ R'$ $P''\ Q''\ R''$ ne seraient pas constants, pourvu qu'on sache intégrer les équations (A) privées de leurs seconds membres. —

Les équations au moyen desquelles on déterminera $\frac{dC_1}{dx}$ $\frac{dC_2}{dx}$ $\frac{dC_3}{dx}$ sont toujours compatibles. (Voyez le cours de M. Vieille). —

184v

Methode de Dalembert.

Considerons d'abord deux equations seulement :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Py + \varphi z = V$$

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} + P'y + \varphi' z = V'$$

$P \; \varphi$, $P' \; \varphi'$ sont des coeff. constants ; V et V' sont des fonctions de x —

Multiplions (2) par θ et ajoutons, il vient :

$$(3) \qquad \frac{d(y+\theta z)}{dx} + (P+P'\theta)y + (\varphi+\varphi'\theta)z = V+V'\theta.$$

Cette equation ne renfermerait plus que la seule variable $y+\theta z$, si le rapport du coefficient de z au coefficient de y etait égal à θ. Posons donc

$P+P'\theta = a \qquad \frac{\varphi+\varphi'\theta}{P+P'\theta} = \theta. \qquad$ et $y+\theta z = u$

l'equat. (3) deviendra

$$\frac{du}{dx} + au = V+V'\theta = X$$

équation linéaire qu'on sait intégrer, et qui donne

$$u = e^{ax}\left(C - \int X e^{-ax}\,dx\right).$$

mon l'équation $\frac{Q+Q'\theta}{P+P'\theta} = \theta$ donnera pour θ deux valeurs θ_1 θ_2, d'où l'on déduira p. ces deux valeurs pour u, u_1 et u_2 —; par suite on aura

$$y+\theta_1 z = u_1 \qquad y+\theta_2 z = u_2.$$

D'où l'on voit qu'on pourra déterminer y et z; les valeurs de y et z contiendront deux constantes arbitraires, car u_1 et u_2 contiennent deux constantes arbitraires. —

Application.

(1) $$\frac{dy}{dx} - 3y + 2z = x$$

(2) $$\frac{dz}{dx} + z + y = 3x^2.$$

Je multiplie (2) par un indéterminé θ; j'ajoute.

(3) $$\frac{d(y+\theta z)}{dx} + y(\theta-3) + z(2+\theta) = x + 3\theta x^2$$

et en posant

$$y+\theta z = u \quad (4).$$
$$\theta - 3 = a \quad (5)$$
$$2+\theta = a\theta \quad (6)$$

il vient:

(7) $$\frac{du}{dx} + au = x + 3\theta x^2.$$

éliminant θ entre (5) et (6), on a

$$2+a+3 = a(a+3).$$

Cette équation donne deux valeurs pour a. a_1 et a_2; θ a par suite deux valeurs correspondantes θ_1 θ_2; et l'équation (7) donne

185 v

on trouvera deux valeurs pour u_1 et u_2, chaque valeur u_1, u_2 contient une constante arbitraire. On a donc

$$y + \theta_1 z = u_1 \qquad y + \theta_2 z = u_2.$$

d'où l'on déduira y et z.

Cette méthode est en défaut dans le cas où l'équation en $\underline{a}$ a ses deux racines égales, car il faut avoir deux valeurs de a pour avoir deux valeurs de u.

Supposons donc que l'équation en $\underline{a}$ ait ses deux racines égales; soit a_1 la valeur commune. on aura une valeur correspondante u_1, ce qui donnera $y + \theta_1 z = u_1$ avec une constante. — tirée de là la valeur de y qu'on porte dans l'une des deux équations, on aura une autre équation du 1er degré en z qu'on pourra intégrer, ce qui introduira une nouvelle constante.

On aura donc z en fonction de deux constantes. reportant cette valeur de z dans la relation

$$y + \theta_1 z = u_1$$

on aura la valeur de y en fonction des deux mêmes constantes.

application de la méthode de D'alembert à

m equations linéaires simultanées.

$$\frac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + \dots + P_1 u = X_1$$

$$\frac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + \dots + P_2 u = X_2$$

$$\dots$$

$$\frac{du}{dx} + A_m y + B_m z + \dots + P_m u = X_m \text{ —}$$

(Voyez Duhamel —). — Cas où les coeff. A_1 — P_1 sont constants — Cas où ce sont des fonctions de x.

186v

Equation aux differentielles partielles

Soit une equation $z = \varphi(x,y)$ —

toute relation $F\left(x,y,z,\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}\right)=0$ entre x y z $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ est une équation aux differentielles partielles du 1er ordre.

Il y a de même des equations aux differentielles partielles du 2e ordre; ce sont celles qui contiendraient $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ $\frac{d^2z}{dxdy}$,

Il y en a du 3e et — et —

Nous ne nous occuperons que des eq. aux differentielles partielles du 1er ordre et lineaire lesquelles sont de la forme

$$F(x,y,z)\frac{dz}{dx} + \varphi(x,y,z)\frac{dz}{dy} = \psi(x,y,z).$$

il n'est pas necessaire que l'inconnue z n'entre qu'au 1er degre

cette eq. s'ecrit ordinairement en posant

$$\frac{dz}{dx}=p \quad \frac{dz}{dy}=q.$$

$$Pp + Qq = R.$$

Le problème de l'integration revient à trouver une certaine surface ~~dans le cas examiné jusqu'ici quand on donnait x et y, la tangente à la courbe était déterminée~~.

telle que en un point qcq. de cette surface, les quantités $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$ aient entre elles une certaine relation.

Or qu'est ce que exprime cette relation?

L'éq. du plan tangent à la surface est

$$V - z = p(t - x) + q(u - y).$$

En remplaçant p par sa valeur tirée de l'éq. différentielle donnée, l'éq. du plan tgt devient:

$$V - z = \frac{R - Qq}{P}(t - x) + q(u - y).$$

Dans cette équation tout est connu excepté q. — égalons à zéro le coeff. de q et le terme indép. nous aurons

$$(A) \quad \begin{cases} V - z = \frac{R}{P}(t - x) \\ -\frac{Q}{P}(t - x) + u - y = 0 \end{cases}$$

Si ces deux équations sont vérifiées, celle du plan le sera quel que soit q; donc le plan tangent passe, quel que soit q par une certaine droite, laquelle droite a pour équation les éq. (A). Ces équations peuvent se mettre sous une forme plus symétrique

$$(B). \quad \frac{t - x}{P} = \frac{u - y}{Q} = \frac{V - z}{R}.$$

Proposons nous maintenant d'exprimer qu'une surface est telle qu'en chacun de ses points le plan tangent contient la droite (B).

L'équation du plan tangent à la surface est

$$v - z = p(t-x) + q(u-y).$$

L'équation qui exprime que ce plan contient la droite (D) est

$$Pp + Qq = R.$$

Je passe maintenant à l'intégration des éq. aux différentielles partielles.

J'établirai un lemme sur lequel cette intégration repose.

Soient des équations simultanées en nombre quelconque et de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z, u) \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z, u) \\ \dfrac{du}{dx} = \varphi_3(x, y, z, u) \end{cases}$$

leur solution générale contiendra un nombre de constantes égal à celui des fonctions inconnues. Soient

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1 = F_1(x, y, z, u) \\ \alpha_2 = F_2(x, y, z, u) \\ \alpha_3 = F_3(x, y, z, u) \end{cases}$$

les intégrales résolues par rapport aux constantes. Je dis qu'on aura identiquement

$$(3)\quad \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\varphi_1 + \frac{dF_1}{dz}\varphi_2 + \frac{dF_2}{du}\varphi_3 = 0$$

et des éq. semblables pour F_2 et F_3.

En effet les éq. (1) pouvant être remplacées par leurs intégrales (2), si $x\ y\ z\ u$ varient de manière à satisfaire aux équations (1), la fonction F_1 doit rester constante, et par suite sa dérivée doit être nulle; on a

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dF_1}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 0$$

et à cause des éq. (1) qui par hypothèse sont satisfaites, cette relation coincide avec l'équation (3). De plus celle-ci est identique, car les lettres $x, y, z\ u$ qu'elle renferme étant assujetties à la seule condition de satisfaire aux éq. différentielles ou, ce qui revient au même à leurs intégrales, on peut à cause des trois constantes leur assigner à chacune d'elles telle valeur que l'on voudra.

On peut remarquer que les fonctions $F_1\ F_2\ F_3$ pouvaient être remplacées par d'autres et que toute fonction de la forme $F(F_1, F_2, F_3)$

est, quelle que soit la fonction F, dans le même cas que $F_1\ F_2\ F_3$, c. a. d. qu'elle ~~satisfait~~ reste constante pendant la durée des intégrations. elle satisfait donc à la même éq. différentielle (3). On peut le voir du reste par le calcul; en effet on a par hypoth

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\varphi_1 + \frac{dF_1}{dz}\varphi_2 + \frac{dF_1}{du}\varphi_3 = 0$$

$$\frac{dF_2}{dx} + \text{—} \qquad = 0$$

$$\frac{dF_3}{dx} + \text{—} \qquad = 0$$

Je multiplie ces trois éq. respectivement par $\frac{dF}{dF_1}$ $\frac{dF}{dF_2}$ $\frac{dF}{dF_3}$ et j'ajoute membre à membre;

188 v

il vient :

$$\frac{dF}{dF_1}\cdot\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF}{dF_2}\frac{dF_2}{dx} + \frac{dF}{dF_3}\frac{dF_3}{dx} + \varphi_1\left\{\frac{dF}{dF_1}\cdot\frac{dF_1}{dy} + \frac{dF}{dF_2}\frac{dF_2}{dy} + \frac{dF}{dF_3}\frac{dF_3}{dy}\right\} + \dots$$

c. a. d.

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\varphi_1 + \frac{dF}{dz}\varphi_2 + \frac{dF}{du}\varphi_3 = 0.$$

réciproquement toute fonction F_1 qui satisfait à l'equation (3) étant égalée à une constante donnera une integrale du systeme (1). Si l'on a en effet :

(4) $$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\varphi_1 + \frac{d\psi}{dz}\varphi_2 + \frac{d\psi}{du}\varphi_3 = 0$$

et que y z u soient des telles fonctions de x que les ég. (1) soient satisfaites, le 1er membre de (4) sera la dérivée par rapport à x de la fonction ψ et puisque cette dérivée est nulle la fonction ψ sera constante, en vertu des ég. (1) de sorte que

$$\psi = C$$

sera une de leur intégrales. —

En resumant ce qui precede on peut enoncer le theorème suivant : si dans l'ég.

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\varphi_1(x,y,z,u) + \frac{d\psi}{dz}\varphi_2(x,y,z,u) + \frac{d\psi}{du}\varphi_3(x,y,z,u)$$

on considere la fonction ψ comme inconnue, la solution generale s'obtiendra en integrant les ég. simultanées

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1 \quad \frac{dz}{dx} = \varphi_2 \quad \frac{du}{dx} = \varphi_3$$

et prenant pour ψ une fonction qui égalée à une constante fournit une integrale de ces equations.

si donc les integrales sont

$$\alpha_1 = F_1 \qquad \alpha_2 = F_2 \qquad \alpha_3 = F_3$$

non seulement F_1' F_2' F_3' seront des solution de l'eq. en ψ mais la solution la plus générale sera

$$\psi = F(F_1', F_2', F_3')$$

revenons maintenant à l'eq. aux différentielles partielles

(1). $$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R.$$

soit

(2) $$\psi(x, y, z) = C$$

une solution contenant une constante et resolue par rapport à la constante. Si nous en deduisons

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dz}} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{d\psi}{dy}}{\frac{d\psi}{dz}}$$

nous aurons en substituant dans la proposée

(3) $$P\frac{d\psi}{dx} + Q\frac{d\psi}{dy} + R\frac{d\psi}{dz} = 0.$$

et à cause de la constante arbitraire C contenue dans l'eq. (2), cette eq. (3) doit avoir lieu quelsque soient x, y, z. elle dans identique. on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{Q}{P}\frac{d\psi}{dy} + \frac{R}{P}\frac{d\psi}{dz} = 0$$

et en vertu du theorem precedent il faut pour obtenir la solution générale integrer le système

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$$

189v

et si les integrales sont

$$\alpha_1 = f_1(x,y,z) \qquad \alpha_2 = f_2(x,y,z)$$

on prendra

$$\psi = F(f_1\, f_2)$$

de sorte que la solution de l'eq. (1) est

$$F(f_1, f_2) = \text{const.}$$

appliquons ceci à quelques exemples.

Soit l'equation

$$\frac{dz}{dx} - K\frac{dz}{dy} = 0$$

K etant une fonction donnée de x et y. on devra integrer le systeme

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{K} = \frac{dz}{0}$$

c. a d. $\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -K.$

l'une des integrales sera

$$z = C$$

Soit $\qquad \alpha = \varphi(x,y)$ l'autre integrale.

la solution cherchée est

$$z = F(\varphi).$$

Intégration des équations aux différentielles partielles du 1er ordre qui représentent des surfaces cylindriques, des surfaces coniques etc.

Surfaces cylindriques. La propriété caractéristique des surfaces cylindriques consiste en ce que leur plan tangent est parallèle à une droite fixe. elle est exprimée par l'éq.

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1.$$

Les équations simultanées

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{1}$$

ayant pour intégrale

$$x-az=C$$
$$y-bz'=c'$$

l'intégrale générale sous forme finie est

$$x-az=\varphi(y-bz).$$

Surfaces ~~cylindriques~~ coniques. Le plan tangent à une surface conique passe par un point fixe (α,β,γ). on a donc l'équation

$$\gamma-z=\frac{dz}{dx}(\alpha-x)+\frac{dz}{dy}(\beta-y).$$

Je considère les éq. simultanées

$$\frac{dx}{\alpha-x}=\frac{dy}{\beta-y}=\frac{dz}{\gamma-z}.$$

lesquelles ont pour intégrales

$$\frac{\alpha-x}{\gamma-z}=C\qquad\frac{\beta-y}{\gamma-z}=c'$$

190 r°

L'éq. générale sous forme finie sera donc

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right).$$

<u>Surfaces conoïdes</u> un conoïde est la surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à un plan fixe et qui rencontre constamment une droite et une courbe données.

Prenons la droite donnée pour axe des z et le plan fixe pour plan des xy. Le plan tangent à un conoïde devant contenir la generatrice menée au point de contact, coupera l'axe des z en un point dont le z sera égal à celui du point de contact. L'éq. du plan tangent étant

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X-x) + \frac{dz}{dy}(Y-y)$$

Elle devra être satisfaite par $X=0$ $Y=0$ $Z=z$ ce qui donne pour tout point de la surface

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$$

Pour intégrer je pose

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

ce qui donne

$$z = c \qquad \frac{y}{x} = c'$$

l'éq. sous forme finie est donc

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

<u>Surfaces de revolution.</u> Ces surfaces ont pour propriété caractéristique que la Normale menée en un pt qcq de leur points rencontre l'axe. Soient

$$x = az + \alpha \qquad y = bz + \beta$$

les equations de l'axe. Une normale ~~qcq~~ à une surface a pour equation

$$X - x + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0 \qquad Y - y + \frac{dz}{dy}(Z - z) = 0$$

Pour qu'elle rencontre l'axe, il faudra qu'on ait la condition:

$$\frac{x - \alpha + z\frac{dz}{dx}}{a + \frac{dz}{dx}} = \frac{y - \beta + z\frac{dz}{dy}}{b + \frac{dz}{dy}}.$$

Reduisant cette equation il vient:

$$(y - bz - \beta)\frac{dz}{dx} - (x - az - \alpha)\frac{dz}{dy} = b(x - \alpha) - a(y - \beta)$$

ou bien si l'on prend l'origine sur un point de l'axe.

$$(y - bz)\frac{dz}{dx} - (x - az)\frac{dz}{dy} = bx - ay.$$

Considérons les equations

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{-dy}{x - az} = \frac{dz}{bx - ay}$$

ou ~~$(bx - ay)\,dx = (y - bz)\,dz$~~

~~$-(bx - ay)\,dy = (x - az)\,dz.$~~

191 v

En introduisant une variable auxiliaire

$$dx = (y - bz)\,dt$$
$$dy = -(x - az)\,dt$$
$$dz = (bx - ay)\,dt$$

Si on ajoute les 3 éq. après les avoir multipliées par x, y, z on a

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

d'où $\quad x^2 + y^2 + z^2 = C.$

Si on les ajoute après avoir multiplié la 1re par a, la 2e par b, la 3e par 1, il vient

$$a\,dx + b\,dy + \xi\,dz = 0$$

d'où $\quad ax + by + \xi z = C'.$

Donc $\quad ax + by + \xi z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$

ECOLE NORMALE SUPERIEURE